紧复凯勒曲面上的刚性拟有效类

本科论文答辩

曹君宇

清华大学数学科学系

2023 年 6 月 6 日

PSH(多重次调和) 函数

- 设 θ 是紧复 Kähler 流形 X 上的光滑闭 $(1,1)$-形式，且 θ 是实的，即 $\overline{\theta}=\theta$.
- 定义如下函数空间

$$\mathrm{PSH}(X,\theta):=\{\varphi: X\to[-\infty,\infty)\text{上半连续}|\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}},\theta+\mathrm{dd}^c\varphi\geq 0\}$$

叫做 θ-psh 函数空间. 此处 $\mathrm{dd}^c=(\sqrt{-1}/2\pi)\partial\overline{\partial}$

- $\theta+\mathrm{dd}^c\varphi\geq 0$ 在流 (current) 的意义下理解：对于任何一个正的光滑 $(n-1,n-1)$-形式 Ω，即如下形式

$$\Omega=\sum_{I,J}\Omega_{I,J}\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\overline{z}_J$$

其中 $\Omega_{I,J}\geq 0$ 作为 Hermitian 矩阵逐点半正定. 我们有

$$\int_X(\theta\wedge\Omega+\varphi\mathrm{dd}^c\Omega)\geq 0$$

PSH(多重次调和) 函数的一些性质

- 设 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$，则 $\max(\varphi, \psi), \frac{\varphi+\psi}{2} \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$
- 给 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 装备 L^1-拓扑，则 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 是 $L^1(X)$ 的闭子空间
- 函数 $\mathrm{PSH}(X, \theta) \ni \varphi \mapsto \sup_X \varphi \in \mathbb{R}$ 在 L^1-拓扑下连续
- 集合 $\{\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta) \mid \sup_X \varphi = 0\}$ 是紧集
- 设 μ 是 X 上的光滑正测度，集合

$$\mathrm{PSH}(X, \theta)_n := \{\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta) \mid \int_X \varphi \mathrm{d}\mu = 0\}$$

是紧集

PSH 函数和正闭流

- 设 T 是 X 上的一个 $(1,1)$-正闭流 (positive closed current), 它对应一个同调类 $\alpha=\{\theta\}$, 其中 θ 是 α 的一个光滑代表元. 此时我们可取 $\varphi\in L^1(X)$ 使得

$$T=\theta+\mathrm{dd}^c\varphi$$

φ 被称作 T 的势函数

- 所有同调类取 $\alpha=\{\theta\}$ 的正闭流一一对应于

$$\mathrm{PSH}(X,\theta)/\mathbb{R}$$

于是 PSH 函数可被视作正闭流的势函数

- $\varphi\in\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 在 $x_0\in X$ 处的 Lelong 数定义为

$$\sup\{\gamma\geq 0\mid \varphi(x)\leq\gamma\log|x-x_0|+O(1)\ \text{当}x\text{趋于}x_0\}=:\nu(\varphi,x_0)$$

它是有限的. 若 φ 局部有界, 它的 Lelong 数为 0.

同调类的正性

- 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是 X 上的同调类,θ 是 α 的一个光滑代表元.
- 我们定义如下同调类的正性:
- α 是拟有效的 (pesudo-effective), 当且仅当 $\mathrm{PSH}(X,\theta) \neq \emptyset$, 当且仅当存在正闭流 T, 它的同调类等于 α.
- α 是大的 (big), 当且仅当存在同调类等于 α 的正闭流 T, 满足 $T \geq \epsilon\omega$, 此处 $\epsilon > 0$,ω 是 Hermitian 度量.
- α 是丰沛的 (ample), 当且仅当存在同调类等于 α 的光滑正形式 T, 满足 $T \geq \epsilon\omega$.
- 拟有效类 $\subset$ 大类 $\subset$ 丰沛类

与代数几何的关系

- 此处设 X 是光滑射影流形,L 是其上的全纯线丛.
- (Kodaira)$c_1(L)$ 是丰沛的同调类当且仅当 L 是丰沛的
- (Demailly,[DPS01])$c_1(L)$ 是大的同调类当且仅当 L 是大的,即

$$\mathrm{vol}(L)=\limsup_{k\to\infty}\frac{H^0(X,kL)}{k^{\dim(X)}/\dim(X)!}>0$$

问题的来源

- 函数空间 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 的大小可反应 $\alpha=\{\theta\}$ 的正性.
- 例如,$\mathrm{PSH}(X,\theta)\neq\emptyset$ 当且仅当 $\alpha=\{\theta\}$ 是拟有效类.
- 此外, 设 $\alpha=\{\theta\}$ 是大类, 则函数空间 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 的切空间包含所有光滑函数方向: 对任一 $\varphi\in\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 及 $f\in C^\infty(X)$, 我们有 $\varphi+tf\in\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 对 $|t|\ll 1$.
- 问题: 当 α 是大类时, 函数空间 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 足够大. 那么函数空间 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 足够小时,α 有什么性质?
- 非空集合 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 最小只能到 $\mathbb{R}+\varphi_0$.

刚性类的定义

- 设 $\alpha = \{\theta\}$ 是拟有效类，我们称 α 是刚性的，如果

$$\mathrm{PSH}(X, \theta) = \varphi_0 + \mathbb{R}$$

此定义不依赖于 θ 的选取.

- 等价地，存在唯一的正闭流在同调类 α 里.
- 若 $\alpha = c_1(L)$ 是刚性类，且 L 有整体截面. 则 $h^0(X, mL) = 1$.
- 例子：设 $\pi : \tilde{X} \to X$ 是对 X 点 p 的爆发 (blow up)，设 E 是对应的例外除子. 则 $\{E\}$ 是刚性的.

刚性类的性质

- 记 $\mathcal{R}$ 为刚性类构成的集合，由定义 $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$. 此处 $\mathcal{E}$ 是拟有效类构成的集合.
- $a \in \mathcal{R}$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 蕴含 $\lambda a \in \mathcal{R}$
- $a, b \in \mathcal{E}$ 且 $a + b \in \mathcal{R}$ 蕴含 $a, b \in \mathcal{R}$
- $0 \in \mathcal{R}$
- 若 X 是 Kähler 流形，则 $\mathcal{R} \subset \partial\mathcal{E}$
- 设 $\pi : Y \to X$ 是紧 Kähler 流形间的全纯满射，其纤维连通. 则 α 是 X 上的刚性类当且仅当 $\pi^*\alpha$ 是 Y 上的刚性类

刚性类的例子

- (Serre's example) 设 C 是椭圆曲线,E 是 C 上的一个二维全纯向量丛, 满足如下的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(C) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(C) \longrightarrow 0$$

  对应扩张类 $e \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(C), \mathcal{O}(C)) = \mathrm{H}^1(C, \mathcal{O}_C)$. 取 $X := \mathbb{P}(E)$ 为一射影流形,$D := \mathbb{P}(\mathcal{O}_C)$ 为 X 上的除子. 当 $e \neq 0$, 即上述正合列不分裂时,D 是 X 上的刚性除子. D 还是数值有效的.

- 将上述 X 在 $p \in D$ 处做爆发 (blow-up), 考虑 D 在此爆发下的拉回, 我们得到了新的刚性除子

$$\tilde{D} + E = \pi^* D$$

  此处 $\tilde{D}, E$ 是自相交数为 -1 的素除子. 拉回后的除子仍然是数值有效的.

刚性类的例子 (续)

- (Green 流) 考虑紧复 Kähler 曲面 (X, ω) 的一个带正熵的自同构 f，它会自然的诱导出一对正闭流 $T^{\pm}$ 如下

$$T^{\pm} = \lim_{n \to \infty} \frac{(f^{\mp})^n_*}{\lambda^n}\omega, \qquad \lambda = e^h \quad h\text{是动力系统}(X, f)\text{的熵}$$

它们叫做 Green 流 (Green currents).
由 Cantat 及 Dinh-Sibony 的工作，上述 Green 流的同调类是数值有效的刚性类. 且 Green 流的势函数是 Hölder 连续的.

1 课题背景

2 论文结果

- 刚性拟有效类的分类定理
- 刚性有效除子的研究
- 拟有效类的直径函数

3 参考文献

1 课题背景

2 论文结果

- 刚性拟有效类的分类定理
- 刚性有效除子的研究
- 拟有效类的直径函数

3 参考文献

曲面上刚性拟有效类的分类定理

定理

设 α 是紧复 *Kähler* 曲面 X 上的拟有效类, 则

- α 是刚性类当且仅当 $Z(\alpha)$ 是刚性类,$Z(\alpha)$ 是其 *Zariski* 分解的正部.
- 若 α 是 X 上的刚性数值有效类, 它必为如下几种形式之一

第一类 $\alpha = a\{D\}$, 此处 $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,$D$ 是一个素除子

第二类 $\alpha = \{R\}$, 此处 R 是一个正闭流, 其 *Lelong* 数处处为 0, 且 $R_{ac}^2 = 0$.

第三类 $\alpha = a\sum_{i\in I} a_i\{D_i\}$, $\mathbb{Q} \ni a_i > 0$,$a > 0$. 这里 I 是一个有限指标集, 且 $\{D_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ 是一族例外素除子, 取遍所有 $j \in I$.

回忆前面所说的例子: Serre's example 对应第一类刚性数值有效类, Green 流代表第二类刚性类. 通过对第一类刚性数值有效除子做爆发 (blow-up), 我们可得到第三类刚性数值有效类.

曲面上的 Zariski 分解

- 设 X 是紧复 Kähler 曲面,α 是 X 上的一个拟有效类
- 我们对 α 有如下的 Zariski 分解:$\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$, 此处 $Z(\alpha)$ 是数值有效类,$N(\alpha)$ 是一个 $\mathbb{R}$-有效除子.
- $N(\alpha) = \sum a_i E_i$ 是例外类, 即相交形式 $(E_i \cdot E_j)$ 是负定矩阵.
- Zariski 分解在如下意义下唯一: 它将 α 写成修正数值有效类(这里是 $Z(\alpha)$) 与例外 $\mathbb{R}$-有效除子（这里是 $\{N(\alpha)\}$）的和, 且在相交形式下正交.
- 当 X 是射影流形, 若 $\alpha = c_1(L)$. 则上述 Zariski 分解和代数几何中对线丛 L 的 Zariski 分解一样.

简略证明

- 利用 Boucksom 对 Zariski 分解的解析刻画 [Bou04], 我们可知
  $$T \in \alpha \quad \text{当且仅当} \quad T \geq [N(\alpha)]$$
  此处 T 是同调类 α 里的正闭流. 如果 $Z(\alpha)$ 是刚性类, 对任何正闭流 $T \in \alpha$, 我们得到正闭流 $T - [N(\alpha)] \in Z(\alpha)$. 由 $Z(\alpha)$ 的刚性,$T - [N(\alpha)]$ 是唯一的, 于是 T 被唯一确定,α 是刚性类.
- 于是我们将问题约化至数值有效类的情形. 设 α 是刚性的数值有效类,$T \in \alpha$ 是其中的正闭流. 对 T 做萧荫堂分解
  $$T = \sum_{i \geq 1} a_i [D_i] + R$$
  此处 $a_i \geq 0$, D_i 是素除子.

简略证明 (续)

- 利用 Hodge 指标定理, 上文的分解里 $T = R$ 或 $R = 0$.
- 当 $R = 0$ 时, 再次利用 Hodge 指标定理即可完成证明.
- 若 X 是紧 hyper-Kähler 流形,Hodge 指标定理及 Zariski 分解仍然成立 (见 [Bou04]). 于是我们可导出类似的结果.

1. 课题背景
2. 论文结果
   - 刚性拟有效类的分类定理
   - 刚性有效除子的研究
   - 拟有效类的直径函数
3. 参考文献

刚性有效除子

注意第一类和第三类刚性拟有效类都是 $\mathbb{Z}$-有效除子，我们研究有效除子的刚性.

定理

设 X 是一个紧复流形, D 是上面的一个 $\mathbb{Z}$-有效除子, 记 $L := \mathcal{O}_X(D)$ 是全纯线丛. 则如下的论断互相等价:

1. $[D]$ 是刚性正闭流.
2. 线丛 L 上的正奇异权 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有极小奇点.
3. 存在 $\mathrm{Supp}(D)$ 的一个全纯邻域 U, 使得线丛 $L|_U$ 上的任一正奇异权的奇点都不比 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 严格小.
4. 对 $\mathrm{Supp}(D)$ 的任何一个全纯邻域 U, 线丛 $L|_U$ 上的任一正奇异权的奇点都不比 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 严格小.

刚性有效除子 (续)

于是除子的刚性是一种邻域性质:

定理

设 X 与 X' 是两个紧复流形, D 和 D' 分别是 X 与 X' 上的有效除子. 假设存在 D 的全纯开邻域 U (分别地,D' 的全纯开邻域 U'), 以及一个双全纯映射

$$g : U \to U'$$

其将 D 映到 D'. 则 $[D]$ 是刚性的当且仅当 $[D']$ 是刚性的.

刚性有效除子 (续)

回忆紧复曲面上的几何

定理 (Proposition 4.3 in [BPV84])

设 X 是一个紧复曲面,C 是其上的一个光滑嵌入的有理曲线. 如果 $(C^2) = 0$, 则存在一个紧合双有理映射 *(modification)*

$$\varphi : X \to Y$$

此处 Y 是一个直纹面,C 与例外除子 $\mathrm{Exc}(\varphi)$ 不交, 且 $\varphi(C)$ 是 Y 的一个纤维.

于是曲面上的光滑嵌入有理曲线不可能是刚性除子, 除非它是例外除子.

1. 课题背景
2. 论文结果
    - 刚性拟有效类的分类定理
    - 刚性有效除子的研究
    - 拟有效类的直径函数
3. 参考文献

拟有效类的直径函数

- 对紧复 Kähler 流形 X 上的拟有效类 α，我们得到如下无限维紧凸体

$$\mathcal{E} \ni \alpha \mapsto \{\varphi_1 - \varphi_2 \mid \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{PSH}_n(X, \theta)\} =: \Delta\mathrm{PSH}_n(X, \alpha)$$

- α 的直径函数是上述凸体在 $L^P(X, \mu)$ 空间下的直径：

$$\mathrm{diam}_{p,\mu}(\alpha) := \sup_{f \in \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)} ||f||_{L^P(X,\mu)}$$

- $\mathrm{diam}_{p,\mu}(\alpha) = 0$ 当且仅当 α 是刚性类.

复环面上的计算

定理

设 $E=\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 是一椭圆曲线,$X=E\times E$ 是一复环面. 对 X 上的同调类 $\theta=\sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1+\mathrm{d}z_2)\wedge\overline{(\alpha \mathrm{d}z_1+\mathrm{d}z_2)}$ $(\alpha\in\mathbb{C})$, 我们有

$$\operatorname{diam}(\theta)=\begin{cases}0 & a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-1})\\ \dfrac{1}{|q|^2}d_0 & a=\dfrac{p}{q}\text{是}\mathbb{Q}(\sqrt{-1})\text{中的既约分式}\end{cases}$$

这里 $d_0=\operatorname{diam}(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1\wedge \mathrm{d}\overline{z_1})$.

复环面上的计算 (续)

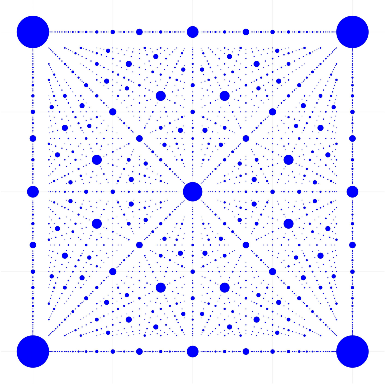

图 1: $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 中的点, 点的大小 $\sim 1/|q|^2$(credit to 薛皓天)

1 课题背景

2 论文结果

3 参考文献

[Bou04] Sébastien Boucksom.
Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds.
Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 37(1):45–76, January 2004.

[BPV84] W. Barth, C. Peters, and A. Ven.
Compact complex surfaces, 1st Editon.
Springer Berlin Heidelberg, 1984.

[DPS01] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider.
Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds.
International Journal of Mathematics, 12(06):689–741, August 2001.

Thanks!