清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：紧复凯勒曲面上的刚性拟有效类

系　　别：数学科学系

专　　业：数学与应用数学

姓　　名：曹君宇

指导教师：肖　建　副教授

2023 年 6 月 6 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：曹君宇　导师签名：肖建　日　期：2023年6月6日

中文摘要

本文考察紧复流形上，特别是紧复 Kähler 曲面及紧 hyper-Kähler 流形上的刚性拟有效类。这里的刚性指该拟有效类中仅含唯一的正闭流。利用 Boucksom 发展的除子 Zariski 分解，我们给出了紧复 Kähler 曲面及紧 hyper-Kähler 流形上刚性拟有效类的结构性定理。通过 Ueda，Koike，Sibony，Dinh 等人的系列工作，利用动力系统的工具，我们在曲面上构造了一些刚性拟有效类。最后我们介绍了拟有效类的直径函数，并在一些特殊的二维复环面上进行了显式的计算。

关键词: 紧复曲面; 刚性拟有效类; Ueda 理论; hyper-Kähler 流形; 除子 Zariski 分解

ABSTRACT

We investigate rigid pseudo-effective classes on compact complex manifolds, especially on compact Kähler surfaces and on compact hyper-Kähler manifolds. Here we say a pseudo-effective class is rigid if it contains a unique positive closed current. Using the divisorial Zariski decomposition developed by Boucksom, we give a structure theorem on rigid classes on ompact Kähler surfaces and compact hyper-Kähler manifolds. And we give some concrete examples of rigid classes on compact complex surfaces following the work by Ueda, Koike, Sibony, Dinh, which invloves tools in dynamical systems. Lastly, we introduce the diameter function of pseudo-effective classes, and calculate it on certain complex torus of dimension 2.

Keywords: compact complex surfaces; rigid pseudo-effective classes; Ueda theory; hyper-Kähler manifolds; divisorial Zariski decomposition

目　　录

第 1 章　引言

1.1　问题的背景

在本篇文章里，我们讨论紧复流形上一类特殊的拟有效类，即刚性拟有效类。我们先回忆之后用到的一些基本概念，这些概念的具体定义将在第二章里阐述。

设 X 是一个维数为 n 的紧复流形，$\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ 是 $\partial\bar{\partial}$-同调群中的一个元素。我们称 α 是**拟有效**的，如果存在一个正闭流 (positive closed current) T，它的同调类等于 α，等价地，此时拟多重次调和函数空间 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 非空，这里 θ 是同调类 α 的一个光滑代表元。

除去拟有效性之外，我们还可以给同调类定义如下的正性，它们都蕴含拟有效性：

(1) α 是**大类**（big），如果存在 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$ 使得 $\theta + dd^c\varphi \geqslant \epsilon_0\omega$。这里 ω 是一个 Hermitian 度量，$\epsilon_0 > 0$ 是一个正数。

(2) α 是**数值有效类**（nef），如果对任意的 $\epsilon > 0$，我们可以找到光滑函数 φ_ϵ 使得 $\theta + dd^c\varphi_\epsilon > -\epsilon\omega$。

若 X 是一个光滑射影流形，$\alpha = c_1(L)$ 是 X 上全纯线丛 L 的陈类，此时 α 是大类（或数值有效类）当且仅当线丛 L 是大的（或数值有效的）。（见 Demailly 的工作，如[1]中 Proposition 1.2）

本文的一个动机是研究拟有效类 $\alpha = \{\theta\}$ 的拟多重次调和函数集 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 如何决定 α 的正性。当 α 是大类时，我们知道 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 的切空间包含所有的光滑函数。本文意在研究另外一种极端情况，这时 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 充分小，即

$$\mathrm{PSH}(X, \theta) = \varphi_0 + \mathbb{R}$$

我们称这样的拟有效类 α 是**刚性**的。

刚性拟有效类在以往的文献中往往以例子的形式出现，如著名的 Serre's example, 其构造详见 Demailly-Peternell-Schneider 文章[2]中的 Example 1.7。粗略来说，这个拟有效类由紧 Kähler 曲面上的一条光滑椭圆曲线 C 表示。它数值有效却是刚性类，于是它便不能由半正的光滑形式标出。在历史上，丘成桐曾错误地将之视为 Calabi 猜想的一个反例 (见[3]里的评注)。最近，曹俊彦-Höring 将这个例子推广到高维的情形，见[4].

刚性拟有效类同时也在动力系统的构造中出现，考虑紧复 Kähler 曲面 (X, ω)

的一个带正熵的自同构 f，它会自然的诱导出一对正闭流 $T^{\pm}$ 如下

$$T^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^{\mp})_*^n}{\lambda^n}\omega, \qquad \lambda = e^h \quad h\text{是动力系统}(X,f)\text{的熵}$$

它们叫做 Green 流（Green currents），其地位类似于 f 的不变测度。Cantat 及 Dinh-Sibony 的工作指出，上述 Green 流是正闭流，其同调类是刚性的数值有效类。并且 $T^{\pm}$ 的局部势函数是 Hölder 连续的。

最近 Fillip-Tosatti 的文章[5]给出了一些 K3 曲面上刚性拟有效类的刻画。更一般地，Sibony-Soldatenkov-Verbitsky 的文章[6]利用紧 hyper-Kähler 流形复结构的遍历论，给出了一些紧 hyper-Kähler 流形上刚性拟有效类的刻画。

1.2 本文得到的结果

以下是本文得到的新结果。

首先，利用 Boucksom 引入的除子 Zariski 分解（见[7]），我们分类了紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形上的刚性拟有效类：

定理 1.1 (定理3.6): 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，α 是 X 上的拟有效类。那么

- α 是刚性的当且仅当 $Z(\alpha)$ 是刚性的。这里 $Z(\alpha)$ 是 α 的除子 Zariski 分解的正部，它是修正数值有效的。
- 若 α 是刚性的修正数值有效类，那么 $\mathrm{vol}(\alpha) = 0$，且 α 可分为如下三类:
  (1) 第一类：$\alpha = a\{D\}$，这里 D 是 X 上的一个素除子，$a > 0$ 是一个正数。
  (2) 第二类：$\alpha = \{R\}$，这里 R 是一个正闭流，且 $\nu(R, D) = 0$ 对所有 X 上的素除子 D。
  (3) 第三类：$\alpha = a\sum_{i\in I} a_i\{D_i\}$，$a \in \mathbb{R}_{>0}$，$\mathbb{Q} \ni a_i > 0$。这里 I 是一个有限指标集，并且对所有的 $j \in I$，$\{D_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ 构成例外除子。特别地，我们可以知道 $2 \leqslant \mathrm{Card}(I) \leqslant \rho(X)$，这里 $\rho(X)$ 是 X 的 Picard 数。

其次，我们对上述分类里的第一类及第三类刚性类进行了研究：

定理 1.2 (命题4.1): 设 X 是一个紧复流形，D 是上面的一个 $\mathbb{Z}$-有效除子（不必约化 (reduced)），记 $L := \mathcal{O}_X(D)$ 是全纯线丛。则如下的论断互相等价：

(1) $[D]$ 是刚性正闭流。

(2) 线丛 L 上的正奇异权 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有极小奇点。

(3) 存在 $\mathrm{Supp}(D)$ 的一个全纯邻域 U，使得线丛 $L|_U$ 上的任一正奇异权都不比

$\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有更小的奇点，除非它的奇点类和 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 一样。

(4) 对 $\mathrm{Supp}(D)$ 的任何一个全纯邻域 U，线丛 $L|_U$ 上的正奇异权都不比 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有更小的奇点，除非它的奇点类和 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 一样。

于是有效除子的刚性是它的邻域性质：

推论 1.1 (命题4.2)： 设 X 与 X' 是两个紧复流形，D 和 D' 分别是 X 与 X' 上的有效除子。假设存在 D 的全纯邻域 U（分别地，D' 的全纯邻域 U'），以及一个双全纯映射

$$g : U \to U'$$

其将 D 映到 D'。则 $[D]$ 是刚性的当且仅当 $[D']$ 是刚性的。

最后，我们讨论紧复 Kähler 流形 X 上的拟有效类 α 对应的如下无限维紧凸体 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$（见第 6 章的定义）：

$$\mathcal{E} \ni \alpha \mapsto \{\varphi_1 - \varphi_2 \mid \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{PSH}_n(X,\theta)\} =: \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha) \subset \bigcap_{p\geqslant 1} L^p(X,\mu)$$

我们在第 6 章讨论了该凸体的一些一般性质。我们同时考虑了在[6]中引入的直径函数，它被定义为上述凸体在 $L^P(X,\mu)$ 空间下的直径：

$$\mathrm{diam}_{p,\mu}(\alpha) := \sup_{f\in\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)} ||f||_{L^P(X,\mu)}$$

容易看出，α 是一个刚性类当且仅当 $\mathrm{diam}_{p,\mu}(\alpha) = 0$ 对某个 μ 及 p。

我们在本文里对一些复环面上的拟有效类计算直径函数，结果如下：

命题 1.1 (命题6.6)： 设 E 是一椭圆曲线，满足 $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_D$，$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的类数为 1，$X = E \times E$。对 X 上的同调类 $\theta = \sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2)}$（$\alpha \in \mathbb{C}$），我们有

$$\mathrm{diam}(\theta) = \begin{cases} 0 & a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-D}) \\ \dfrac{1}{|q|^2} d_0 & a = \dfrac{p}{q}\text{是}\mathbb{Q}(\sqrt{-D})\text{中的既约分式} \end{cases}$$

这里 $d_0 = \mathrm{diam}(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1})$。

1.3 本文结构

在第二章里，我们介绍复流形上的正闭流（positive closed currents），以及基本的多重势理论（pluripotential theory）。这是本文的主要工具，相应内容至今已十分

完备，读者可参见 Demailly 的教材[8]，以及 Guedj-Zeriari 的教材[9]。

在第三章里，我们介绍 Boucksom 的除子 Zariski 分解，利用它，我们对紧复 Kähler 曲面及紧 hyper-Kähler 流形上的刚性拟有效类进行了研究。

在第四章里，我们分析了第一类及第三类刚性除子的邻域结构。利用 Ueda 理论以及 Koike 的系列工作，我们证明了曲面上的一类除子均具有刚性。

在第五章里，我们介绍了 Dinh-Sibony 关于 Green 流的工作，证明了 Green 流的刚性。通过证明 Green 流的局部势函数是 Hölder 连续的，我们知道 Green 流对应第二类刚性拟有效类。

在第六章里，我们考察了拟有效类的直径函数，并在一些特殊情况下对直径函数进行了计算。

第 2 章　前置知识

2.1　流的理论

在此节中，我们介绍复流形 X 上的流理论（theory of currents）。设 X 是维数为 n 的复流形，此时 X 不必是紧的。

我们首先介绍紧支微分形式空间 $C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 上的拓扑，这是 C^r 系数，支撑在紧集 L 上的微分形式所构成的空间。此处 $0 \leqslant r \leqslant \infty$。

定义 2.1： 设 $L = \cup_{1 \leqslant i \leqslant N} L_i$，其中 L_i 是紧集且包含于 X 的一个坐标卡 $(\Omega_i, x^{(i)})$ 里。此处 $x^{(i)}$ 是 Ω_i 的实坐标。

对任一 $u \in C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$，在 Ω_i 里它表示为如下形式：

$$u = \sum_I u_I \mathrm{d}x_I^{(i)}$$

于是 $C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 上的拓扑由以下一族半范数确定：

$$p^s_{\Omega_i, L_i}(u) = \max_{|\alpha| \leqslant s} \sup_{x^{(i)} \in L_i} |D^\alpha u_I(x^{(i)})|$$

此处 $1 \leqslant i \leqslant N$，$0 \leqslant s \leqslant r$。该拓扑不依赖于 L_i 及坐标卡 $(\Omega_i, x^{(i)})$ 的选取。在此拓扑下，$C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 是 Fréchet 空间，当 $0 \leqslant r < \infty$ 时，它是 Banach 空间。

我们接着定义紧支撑的微分形式空间（或测试形式空间）上的拓扑。

定义 2.2： 设 $\{L_j\}_{j \geqslant 1}$ 是 X 的由紧集构成的穷竭族（exhaustion family）。则测试形式空间是如下集合的直极限：

$$C^r_0(X, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X) = \bigcup_{j \geqslant 1} C^r(L_j, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$$

且有自然的 LF 拓扑，即 $U \subset C^r_0(X, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 是开集当且仅当对所有 $j \geqslant 1$，$U \cap C^r(L_j, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 是 $C^r(L_j, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 上的开集。可以验证，此拓扑不依赖于穷竭族的选取。

我们可以显式地写出此拓扑下的收敛：

$$u_k \to u \quad 在 \quad C^r_0(X, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$$

当且仅当存在一个紧集 L 使得 $u_k, u \in C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$ 且

$$u_k \to u \quad 在 \quad C^r(L, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$$

我们用记号 $\mathcal{D}^p(X)$ 表示拓扑空间 $C_0^\infty(X, \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} X)$，其拓扑如上定义。

定义 2.3： 度数为 k 的流 T 是 $\mathcal{D}^{2n-k}(X)$ 上的一个 $\mathbb{C}$-线性连续泛函。所有度数为 k 的流构成集合 $\mathcal{D}'^k(X)$，$\mathcal{D}'^k(X)$ 上的拓扑由弱-$*$ 拓扑定义。

我们称一个流的维数是 p，如果它的度数是 $2n-p$。

注释 2.1： 利用 X 上的复结构，我们对测试形式空间有如下分解

$$\mathcal{D}^p(X) = \bigoplus_{0\leqslant l\leqslant p} \mathcal{D}^{l,p-l}(X)$$

对偶地，我们对流空间有如下分解

$$\mathcal{D}'^k(X) = \bigoplus_{0\leqslant l\leqslant k} \mathcal{D}'^{l,k-l}(X)$$

此处 $\mathcal{D}'^{l,k-l} \subset \mathcal{D}'^k(X)$ 是所有那些在 $\mathcal{D}^{n-l',n-k+l'}(X)$，$l' \neq l$ 上取值为 0 的线性泛函。

在流上，我们有好的紧性结果。我们先引入流的质量：

定义 2.4： 取定 X 上的一个黎曼度量 g，设 V 是 X 上的一个子集，我们定义 T 相对于 g 在 V 上的质量如下：

$$||T||_{V,g} := \sup_{\substack{||\varphi||_g \leqslant 1, \varphi\in\mathcal{D}(X) \\ \mathrm{Supp}\,\varphi\subset V}} |\langle T, \varphi\rangle|$$

注释 2.2： 如果 V 有一个预紧邻域 $\widetilde{V}$，则对 X 上两个不同的黎曼度量 g_1 和 g_2，存在常数 $C = C(g_1, g_2, \widetilde{V})$ 使得

$$C^{-1}||\cdot||_{V,g_2} \leqslant ||\cdot||_{V,g_1} \leqslant C||\cdot||_{V,g_2}$$

当 X 是紧集时，上述预紧邻域总可取到，比如我们可取 $\widetilde{V} = X$。

我们有如下紧性定理：

定理 2.1： 设 $\{T_j\}_{j\geqslant 0}$ 是一列 X 上的，维数为 p 的流。假设 $\sup_{j\geqslant 0}||T||_F < \infty$ 对所有紧集 $F \subset X$，则我们可取一子列 $\{T_{j_l}\}$ 连同一个维数为 p 的流 T 使得：

$$T_{j_l} \to T \quad 当 \quad l \to \infty$$

在最后我们介绍如何通过流来计算上同调群。我们定义

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{cur}}(X, \mathbb{R}) := \frac{\text{d-闭的实流，且度数为}k}{\text{d-恰当的实流，且度数为}k}$$

类似地，我们定义 $\mathrm{H}^k_{\mathrm{cur}}(X, \mathbb{C})$，它是上述空间张量积上 $\mathbb{C}$。

利用 Poincaré -引理与 deRham-Weil 同构定理，我们有如下自然同构

$$J: \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^{k}(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{cur}}^{k}(X,\mathbb{R})$$

利用同构“J”，我们定义类映射：

$$\mathrm{cl}: \mathcal{D}'^{k}(X,\mathbb{R}) \cap \ker(\mathrm{d}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{cur}}^{k}(X,\mathbb{R}) \xrightarrow{J^{-1}} \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^{k}(X,\mathbb{R})$$

它满足

命题 2.1： 若 X 是紧集，类映射 cl 相对于流的弱拓扑连续。

证明 对于每个光滑闭实微分形式 β，我们有

$$\langle T,\beta\rangle = J^{-1}(T) \smile [\beta]$$

若 $T_l \to T$ 是一列收敛的流，我们有

$$\mathrm{cl}(T_l) \smile [\beta] \to \mathrm{cl}(T) \smile [\beta]$$

对所有 $[\beta] \in \mathrm{H}^{2n-k}(X,\mathbb{R})$.

由 Poincaré 对偶，我们有

$$\mathrm{cl}(T_l) \to \mathrm{cl}(T) \quad 在 \quad \mathrm{H}^{k}(X,\mathbb{R})$$

∎

2.2 复流形上的正流

设 X 是一个复流形，利用其上的一个典范定向，我们可以考虑其上微分形式的正性。我们先考虑局部情形

定义 2.5： 设 $V = T_pX$，则一个 (p,p)-形式 $u \in \Lambda^{p,p}V^*$ 被称为是**正的**若对所有 $\alpha^j \in V^*, 1 \leqslant j \leqslant q = n-p$，如下形式

$$u \wedge \sqrt{-1}\alpha^1 \wedge \overline{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\alpha^q \wedge \overline{\alpha}^q$$

是 X 的一个定向。一个 (p,p)-形式 $v \in \Lambda^{p,p}V^*$ 被称为**强正的**如果 v 是如下凸组合

$$v = \sum \gamma_s \sqrt{-1}\alpha^{s,1} \wedge \overline{\alpha}^{s,1} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\alpha^{s,q} \wedge \overline{\alpha}^{s,q}$$

其中 $\alpha^{s,j} \in V^*$ 且 $\gamma_s \geqslant 0$。

注释 2.3： 当 $p=1$ 或 $n-1$ 时，以上两概念等价。

对偶地，我们可定义流的正性：

定义 2.6： 一个流 $T \in \mathscr{D}'^{q,q}(X)$ 被称作是**正的**（分别地，**强正的**）如果 $\langle T,u\rangle \geqslant 0$

对所有逐点**强正的**（分别地，**正的**）测试形式 $u \in \mathscr{D}^{p,p}(X)$。

可以证明正流的各系数是复测度，且满足如下关系：

命题 2.2 (Proposition(1.14) 于 Chapter 3[8])：任一维数为 (p,p) 正流

$$T = (\sqrt{-1})^{(n-p)^2} \sum_{I,J} T_{I,J} \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J$$

是实的，且阶为 0，即它的系数 $T_{I,J}$ 为复测度，且满足 $\overline{T_{I,J}} = T_{J,I}$ 对所有指标 $|I| = |J| = n-p$。且 $T_{I,I} \geqslant 0$。复测度 $T_{I,J}$ 的绝对值 $|T_{I,J}|$ 还满足如下不等式

$$\lambda_I \lambda_J |T_{I,J}| \leqslant 2^p \sum_M \lambda_M^2 T_{M,M}, \quad I \cap J \subset M \subset I \cup J,$$

其中 $\lambda_k \geqslant 0$ 是任一系数且 $\lambda_I = \prod_{k \in I} \lambda_k$。

于是正流的质量可以方便的刻画：

推论 2.1：取定 X 上的一个 Hermitian 度量 ω，设 V 是 X 上的一个子集，我们有常数 $C = C(\omega, V)$ 使得

$$\frac{1}{C}||T||_{V,\omega} \leqslant \int_V T \wedge \omega^p \leqslant C||T||_{V,\omega}$$

对所有维数为 (p,p) 的正流 T。

特别地，在紧流形上我们有

推论 2.2：设 X 是一紧复流形。若 $\{T_i\}$ 是一列 $(1,1)$-正闭流，其 $\partial\bar{\partial}$-同调类有界。则 T_i 是预紧集。

证明 只需说明 T_i 在 X 上的质量有一致上界。取 ω 为 X 上的 Gauduchon 度量，注意该质量可由

$$\int_X T_i \wedge \omega^{n-1} = \{T\} \cdot \{\omega^{n-1}\}$$

控制，等号右边只依赖于同调类。由于同调类有界，上面的结果有界。证毕。 ∎

2.3 多重次调和函数和正性

此节中我们介绍多重次调和函数，随后讨论它们和复流形上的正闭流之间的联系。

定义 2.7：连通开集 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的多重次调和函数（也记做 psh 函数）是满足如下条件的函数 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

- φ 上半连续

- φ 满足如下平均值不等式：对 $a \in \Omega$，及 $\xi \in \mathbb{C}^n$ 满足 $|\xi| = 1$，$r > 0$ 使得 $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$，我们有

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}\xi)\mathrm{d}\theta$$

注释 2.4： 利用上述平均值不等式，我们有

$$\varphi(a) \leqslant \int_{|\xi|=1} \varphi(a + r\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

此处 $\mathrm{d}\sigma(\xi)$ 是单位球 $|\xi| = 1$ 上的标准概率测度。这可通过对定义里的不等式中 ξ 积分得到。

设 μ 是 $[0,r]$ 上的概率测度，我们有

$$\varphi(a) \leqslant \int_0^r \mathrm{d}\mu(s)\int_{|\xi|=1} \varphi(a + s\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

在极坐标下

$$\int_{|\zeta|<1} \varphi(a + r\zeta)\mathrm{d}V(\zeta) = |\mathbb{S}^{2n-1}|\int_0^r t^{2n-1}\mathrm{d}t\int_{|\xi|=1} \varphi(a + t\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

这蕴含

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{|\mathbb{B}^{2n}|}\int_{|\zeta|<1} \varphi(a + r\zeta)\mathrm{d}V(\zeta)$$

作为推论，$\varphi \in L^1_{loc}$ 除非 $\varphi = -\infty$。我们记

$$\mathrm{PSH}(\Omega) := \{\varphi \text{ 在}\Omega \text{ 上多重次调和且}\varphi \neq -\infty\}$$

命题 2.3： 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个连通开集：

(1) 设 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$，且 $\varphi \leqslant \psi$ 勒贝格测度下几乎处处成立，则 $\varphi \leqslant \psi$ 逐点成立。

(2) If $\{\varphi_j\}_j \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ 是一列下降函数列，则 $\varphi := \lim \varphi_j$ 是 Ω 上的 psh 函数（可能为负无穷）

(3) 设 $\{\varphi_j\}_j \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ 局部有一致的上界，则 $\varphi := (\sup \varphi_j)^* \in \mathrm{PSH}(\Omega)$。且 $(\sup \varphi_j)^* = \sup \varphi_j$ 勒贝格测度下几乎处处成立。

(4) 设 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$，则 $\max(\varphi, \psi), \frac{\varphi+\psi}{2} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$。

证明 (1) 由多重次调和函数的上半连续性：

$$\varphi(a) \geqslant \limsup_{\xi \to a} \varphi(\xi)$$

结合平均值不等式：

$$\varphi(a)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|\mathbb{B}^{2n}|}\int_{|\zeta|<1}\varphi(a+r\zeta)\mathrm{d}V(\zeta)$$

我们完成证明。

(2) 直接验证即可。

(3) 由于

$$\varphi(a)=\sup_j \varphi_j(a)\leqslant \sup_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_j(a+re^{i\theta}\xi)\mathrm{d}\theta\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a+re^{i\theta}\xi)\mathrm{d}\theta$$

于是 φ 满足平均值不等式。于是 $\varphi_\epsilon=(\varphi*\eta_\epsilon)\in C^\infty(\Omega_\epsilon)\cap \mathrm{PSH}(\Omega_\epsilon)$，且 φ_ϵ 单调下降到 $\psi\in\mathrm{PSH}(\Omega)$。

我们声称 $\psi=\varphi$ 几乎处处成立。在此声称下，$\psi\neq-\infty$，因为 $\{\varphi_j\}$ 局部有上界。于是

$$\varphi_j\leqslant\varphi_j*\eta_\epsilon\leqslant\varphi*\eta_\epsilon$$

这蕴含 $\varphi\leqslant\varphi^*\leqslant\psi$。利用 (1)，我们可知 $\varphi^*=\psi$ 多重次调和，且 $\varphi^*=\varphi$ 几乎处处成立。

(4) 由定义我们直接验证得到。

∎

在紧流形上，我们需要如下的拟多重次调和函数的概念，因为紧流形上的多重次调和函数全为常数。

定义 2.8： 设 X 是一个复流形，θ 是其上的一个实光滑闭 $(1,1)$-形式。设 $\varphi: X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 是一个函数，我们如下定义：

- φ 是拟多重次调和函数，当且仅当 $-\infty\neq\varphi$ 局部上是多重次调和函数与光滑函数的和。我们记这些函数构成的空间为 $\mathrm{QPSH}(X)$。
- φ 是 θ-多重次调和的（简记为 θ-psh），当且仅当 φ 是拟多重次调和函数，且 $\theta+\mathrm{dd}^c\varphi\geqslant 0$ 是一个正流。我们记这些函数构成的空间为 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$。

注释 2.5： 由局部 dd^c-引理，局部上我们有 $\theta=\mathrm{dd}^c f$，此处 f 是一光滑函数。于是 $\varphi\in\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 当且仅当 $\varphi+f$ 局部上多重次调和。于是命题2.3 中的性质对 θ-psh 函数都对。若 X 是紧 Kähler 流形，我们有 $\mathrm{QPSH}(X)=\cup_\theta\mathrm{PSH}(X,\theta)$。

若 X 是紧流形，$\mathrm{PSH}(X,\theta)\subset L^1(X)$。我们定义 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 上的拓扑为 L^1-拓扑。我们讨论 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 在这个拓扑下的性质：

命题 2.4 (Proposition 8.4, Proposition 8.5 于[9])： 对 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 配备以上拓扑，我

们有

(1) $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 是 $L^1(X)$ 的闭子空间。

(2) 函数 $\mathrm{PSH}(X,\theta) \ni \varphi \mapsto \sup_X \varphi$ 在 L^1-拓扑下连续。

(3) 集合 $\{\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta) \mid \sup_X \varphi = 0\}$ 是紧集。

(4) 设 $\varphi_j \to \varphi$ 为 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 里的收敛序列，则 $\{\varphi_j\}$ 局部有上界，且

$$\varphi = (\limsup_j \varphi_j)^*$$

2.4 Lelong 数和 Skoda 不等式

定义 2.9： 设 X 是维数为 n 的复流形，T 是其上的一个正闭 (p,p)-流。给定 X 上的一个 Hermitian 形式 ω，定义正测度如下

$$\sigma_T := T \wedge \omega^{n-p}$$

对 $x \in X$，取 U 为 x 附近的一个坐标卡，$B(x,r)$ 为这个坐标卡下的欧式球，则如下函数

$$r \mapsto \nu(T,x,r) := \frac{\sigma_T(B(x,r))}{\pi^p r^{2p}}$$

对 $r > 0$ 是递增的。于是 T 在 x 处的 Lelong 数定义为以下极限：

$$\nu(T,x) := \lim_{r\to 0^+} \nu(T,x,r)$$

可以验证 $\nu(T,x)$ 的定义不依赖于 ω 及坐标卡的选取。

注释 2.6： 通过定义可验证 $T \mapsto \nu(T,x)$ 对 T 是上半连续的，对正闭流的弱 $*$ 拓扑。萧荫堂定理告诉我们 $x \mapsto \nu(T,x)$ 对 $x \in X$ 是上半连续的，此时我们取 X 的解析 Zariski 拓扑。

对 $(1,1)$-正闭流 T，其 Lelong 数可用局部势计算：

命题 2.5： 设 X 是维数为 n 的复流形，T 是其上的一个正闭 $(1,1)$-流。局部上，$T = \mathrm{dd}^c\varphi$，$\varphi \in \mathrm{PSH}(U)$，$U$ 是 x_0 附近的一个坐标卡。则

$$\nu(T,x_0) = \sup\{\gamma \geqslant 0 \mid \varphi(x) \leqslant \gamma \log|x-x_0| + O(1) \text{ 当}x\text{趋于}x_0\} =: \nu(\varphi,x_0)$$

当 X 是紧复流形时，Lelong 数可由同调类控制：

命题 2.6： 设 X 是紧复流形，T 是其上的一个正闭 $(1,1)$-流，设 $\{T\} \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$。

则

$$\nu(T,x) \leqslant C = C(X,\{T\})$$

证明 设 ω 是 X 上的 Gauduchon 度量。对任一坐标卡 U，我们可取其中一开集 $\widetilde{U}$ 使得对 $y \in \widetilde{U}$，我们有 $B(y,r_U) \subset U$，于是对 $y \in \widetilde{U}$

$$\nu(T,y) \leqslant \frac{\sigma_T(B(y,r_U))}{\pi r_U^2} \leqslant \frac{\sigma_T(X)}{\pi r_U^2} = \frac{\int_X \{T\}\cdot\{\omega^{n-1}\}}{\pi r_U^2}$$

由于 X 是紧集，如上 $\widetilde{U}$ 可构成 X 的一个有限开覆盖。于是

$$\nu(T,x) \leqslant \max_U \frac{\int_X \{T\}\cdot\{\omega^{n-1}\}}{\pi r_U^2} = C(X,\{T\})$$

∎

运用 Lelong 数，我们有如下源自 Skoda 的估计

定理 2.2 (Theorem 8.11 于[9])： 局部上：若 $\nu(\varphi,x_0) \geqslant n$，则 $e^{-2u} \notin L^1_{loc}(\{x_0\})$。若 $\nu(\varphi,x_0) < 1$，则 $e^{-2u} \in L^1_{loc}(\{x_0\})$。

整体上：若 (X,ω) 是一个紧 Kähler 流形，则存在常数 $\alpha = \alpha(X,\omega) > 0$ 使得对 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\omega), \sup_X \varphi = 0$，我们有

$$\int_X e^{-\alpha\varphi} \leqslant C$$

这里 C 是一个不依赖于 φ 的一致常数。

2.5 正奇异度量与正性

在此节里，我们介绍全纯线丛上的奇异度量，相关内容参见 Demailly 的文章[10] [1]。

设 L 是复流形 X 上的一个全纯线丛，我们定义 L 上的奇异度量如下：

定义 2.10： L 上的奇异度量是如下的一个 Hermitian 度量，在 L 的一个局部平凡化 θ : $L|_\Omega \to \Omega\times\mathbb{C}$ 下，

$$||\xi||^2 = |\theta(\xi)|^2 e^{-\varphi(x)}, \quad x \in \Omega, \xi \in L_x$$

这里 $\varphi(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 被称为该奇异度量的权函数 (weight)，我们将之称为**奇异权** (singular weight)。

任取 L 的两个局部平凡化 θ,θ'，L 上的一个奇异度量对应出两个不同的奇异

权 $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$\varphi' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega')$。在公共区域 $\Omega \cap \Omega'$ 上，两奇异权满足

$$\varphi' = \varphi + \log|g|^2$$

此处 $\theta' = g\theta$，$g \in \mathcal{O}^*(\Omega \cap \Omega')$ 是全纯线丛的转移函数。于是如下曲率流 (curvature current)

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi = \mathrm{dd}^c\varphi$$

良好定义，即不依赖于局部平凡化的选取，且在 X 上整体地定义。若上述 T 是正流，我们称对应的奇异权是正的，并将其称为**正奇异权**。

若 $L = \mathcal{O}(D)$，$D = \sum a_i D_i$ 是 X 上的 $\mathbb{Z}$-除子。我们可以给 L 一个自然的奇异权如下

$$\varphi = \sum a_i \log|f_{D_i}|^2$$

这里 f_{D_i} 是 D_i 的局部定义函数。由庞加莱-Lelong 公式，它的曲率流恰好为 $[D] = \sum a_i[D_i]$。

固定 L 上的一个光滑 Hermitian 度量 h_0，我们得到 (正) 奇异权与如下函数空间的一一对应：

- 任取 L 上的一个奇异度量 h，我们定义函数 $\varphi := -\log(h(e,e)/h_0(e,e))$，这里 e 是线丛 L 的局部非 0 截面。此时 $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$。
- 任取 $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$，我们定义奇异度量 $h = h_0 e^{-\varphi}$。
- 上述奇异度量有正的奇异权当且仅当

  $$\Theta_{L,h_0} + \mathrm{dd}^c\varphi$$

  是正闭流，这里 Θ_{L,h_0} 是 Hermitian 线丛 (L, h_0) 的曲率。因此我们可将正奇异权等同于如下拟多重次调和函数的集合：

$$\mathrm{PSH}(X, \Theta_{L,h_0})$$

利用如上等同，我们今后可只讨论拟多重次调和函数（或 Θ_{L,h_0}-psh）集合。

我们下面定义光滑形式的正性：

定义 2.11： 设 θ 是 X 上的一个光滑的闭 $(1,1)$-形式，且是实的。ω 是 X 上的一个 Hermitian 形式，我们定义

(1) θ 是正的，如果 θ 逐点严格正定。

(2) θ 是数值有效的，如果对应任一 $\epsilon > 0$，存在光滑函数 φ_ϵ 使得 $\theta + \mathrm{dd}^c\varphi_\epsilon > -\epsilon\omega$。

(3) θ 是大的，如果存在拟多重次调和函数 φ 使得 $\theta + \mathrm{dd}^c\varphi \geqslant \epsilon\omega$，此处 $\epsilon > 0$。
(4) θ 是拟有效的，如果存在拟多重次调和函数 φ 使得 $\theta + \mathrm{dd}^c\varphi \geqslant 0$。
(5) θ 是半正的，如果 θ 逐点半正定。
我们说同调类 α 有以上正性，如果它有一个光滑代表元满足相应条件。我们说全纯线丛 L 有以上正性，如果同调类 $c_1(L)$ 有以上正性。

我们最后定义函数空间 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 中元素的奇点：
定义 2.12： 设 φ_1 和 φ_2 是 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 中的两函数，我们定义如下：
(1) 我们写作 $\varphi_1 \preceq \varphi_2$，或者说 φ_1 比 φ_2 更奇异，如果有常数 $C > 0$ 使得 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 + C$
(2) 我们写作 $\varphi_1 \simeq \varphi_2$，或者说 φ_1 和 φ_2 有相同的奇点类 (singularity type)，如果 $\varphi_1 \preceq \varphi_2$ 且 $\varphi_2 \preceq \varphi_2$，或等价地，存在常数 $C > 0$ 使得 $\varphi_2 - C \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 + C$

我们说 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$ 具有极小奇点，如果任何 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 中的函数都比它更奇异。我们将 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 中具有极小奇点的函数的集合写成：$\mathrm{PSH}_{\min}(X,\theta)$

注意 $\max(\varphi_1,\varphi_2) \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$，$(\mathrm{PSH}(X,\theta),\preceq)$ 是一个有向 (directed) 偏序集。当 X 是紧集时，$(\mathrm{PSH}(X,\theta),\preceq)$ 有一个极大元，它可被显式的写出：

$$V_\theta := \sup{}^*\{\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta) \mid \varphi \leqslant 0\}$$

此时 $\mathrm{PSH}_{\min}(X,\theta) \neq \varnothing$。

第 3 章　刚性拟有效类的 Zariski 分解

3.1　刚性拟有效类的一般性质

定义 3.1：　设 X 是一个维数为 n 的紧复流形。一个 $(1,1)$-正闭流 T 被称作**刚性的**，如果除了 T 本身外，没有其他的正闭流 T' 满足 $T' \in \{T\} \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$。一个同调类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 被称作刚性的，如果它包含一个刚性的 $(1,1)$-正闭流。

我们讨论刚性类的一般性质：

命题 3.1：　记 $\mathcal{E} \subset \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 为拟有效类构成的锥，$\mathcal{R}$ 为刚性类构成的子集。我们有

(1) $a, b \in \mathcal{E}$ 且 $a + b \in \mathcal{R}$ 蕴含 $a, b \in \mathcal{R}$

(2) $0 \in \mathcal{R}$

(3) $a \in \mathcal{R}$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 蕴含 $\lambda a \in \mathcal{R}$

(4) $\mathcal{R} \subset \mathrm{bd}(\mathcal{E})$, 或者 $\mathcal{E} = \mathcal{R}$.

证明　前三个命题由定义即可得出。对最后的命题, 设 $a \in \mathcal{R} \cap \mathcal{E}^\circ$。那么对任一 $\theta \in \mathcal{E}$，我们取足够小的正数 $0 < \epsilon << 1$ 使得 $a - \epsilon\theta \in \mathcal{E}$。由于 $\mathcal{R} \ni a = (a - \epsilon\theta) + \epsilon\theta$，我们有 $\theta \in \mathcal{R}$，于是 $\mathcal{R} = \mathcal{E}$。 ∎

注释 3.1：如果 X 是 Fujiki 类 $\mathcal{C}$ 的，或等价地，X 上有一 Kähler 流，那么 $\mathcal{R} \subset \mathrm{bd}(\mathcal{E})$。这时所有的刚性类的体积为 0。

刚性类可以用具有极小奇点的拟多重次调和函数函数刻画：

命题 3.2：　设 $\alpha = \{\theta\}$ 是拟有效类，θ 是同调类中的一个光滑代表元。则以下论断互相等价：

(1) $\mathrm{PSH}_{\min}(X,\theta) = \varphi + \mathbb{R}$ 对某一个函数 φ

(2) $\mathrm{PSH}(X,\theta) = \varphi + \mathbb{R}$

(3) $\{\theta\}$ 是刚性类

证明　只需证明 (1) 推出 (2)：

对任一 $\psi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$，把它加上一个充分大的常数，我们可设 $\varphi(p) < \psi(p) - 1$ 在一点 $p \in X$。由于

$$\max\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{PSH}_{\min}(X,\theta)$$

故由 (1) 有 $\max\{\varphi,\psi\}=\varphi+C$，其中 $C\in\mathbb{R}$。另一方面，由 $\max\{\varphi,\psi\}\geqslant\varphi$，我们有 $C\geqslant 0$。若 $C>0$，我们有 $\psi=\varphi+C$。若 $C=0$，我们有 $\varphi\geqslant\psi$，这和我们开始的假设 $\varphi(p)<\psi(p)-1$ 矛盾。 ∎

回忆拟多重次调和函数在拉回下的性质：

命题 3.3： (Proposition 1.12，于[11]) 设 $\pi: Y\to X$ 是两个紧 Kähler 流形间的全纯满射，θ 是 X 上的光滑闭 $(1,1)$-形式。若 φ 是 X 上具有极小奇点的 θ-psh 函数，那么 $\varphi\circ\pi$ 是 Y 上具有极小奇点的 $\pi^*\theta$-psh 函数。如果 π 具有连通的纤维，那么我们有

$$\pi^*\mathrm{PSH}(X,\theta)=\mathrm{PSH}(Y,\pi^*\theta)$$

作为推论，我们有

推论 3.1： 设 $\pi: Y\to X$ 是两个紧 Kähler 流形间的全纯满射。如果拟有效类 α 不是刚性的，那么 $\pi^*\alpha$ 也不是 Y 上的刚性类。如果 π 的纤维都是连通的，那么 α 是刚性的当且仅当 $\pi^*\alpha$ 是刚性的。

刚性正闭流有如下的唯一逼近性质：

命题 3.4： 设 T 是紧复流形 X 上的刚性正闭流，$\alpha=\{T\}\in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 是它的同调类。那么如下论断互相等价：

(1) α 是一个刚性类。

(2) 对任一下降的正实数列 t_i 以及拟有效类 α_0。若 $T_i\in t_i\alpha_0+\alpha$ 是同调类中的一个正闭流，那么 T_i 的任一收敛子列收敛于 T。

(3) 对某个下降的正实数列 t_i 以及某个拟有效类 α_0。若 $T_i\in t_i\alpha_0+\alpha$ 是同调类中的一个正闭流，那么 T_i 的任一收敛子列收敛于 T。

证明 (1) 蕴含 (2) 因为取同调类的函数 cl 是连续的。(2) 显然蕴含 (3)。(3) 蕴含 (1)，否则我么可取两个正闭流 $T\neq T'$ 在同调类 α 中，于是 $T+t_iT_0$ 和 $T'+t_iT_0$ 是两个收敛序列，且有不同的极限。 ∎

3.2 拟有效类的除子 Zariski 分解

Boucksom 在文章[7]里引入了除子 Zariski 分解，我们在此小节中介绍他的结果。

定义 3.2： 设 X 是一个紧复流形，ω 是 X 上的一个 Hermitian 形式，α 是 $\mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$

中的元素。我们定义如下：

(1) 同调类 α 被称作是修正 Kähler 类当且仅当它包含一个 Kähler 流 T 且满足 $\nu(T,D)=0$，此处 D 取遍 X 上的所有素除子。我们将修正 Kähler 类构成的锥记为 $\mathcal{MK}$。

(2) 同调类 α 被称作是修正数值有效类当且仅当对任意 $\epsilon>0$，存在一个正闭流 T_ϵ 满足 $T_\epsilon \geqslant -\epsilon\omega$，且 $\nu(T_\epsilon,D)=0$，此处 D 取遍 X 上的所有素除子。我们将修正数值有效类构成的锥记为 $\mathcal{MN}$。

注释 3.2： 当 X 是一个紧复 Kähler 曲面时，修正 Kähler 类与 Kähler 类一样，修正数值有效类和数值有效类一样。(见 Section 4.2.1 于[7])

为了引入除子 Zariski 分解，我们定义拟有效类的极小重数。

定义 3.3： 对拟有效类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 以及 $x\in X$。我们定义 α 在 x 处的极小重数为

$$\nu(\alpha,x)=\sup_{\epsilon>0}\inf_{\substack{T\geqslant-\epsilon\omega,\\ T\in\alpha}}\nu(T,x)=\sup_{\epsilon>0}\nu(T_{\min,\epsilon},x)$$

注意到 $\nu(\alpha,x)$ 是 $x\in X$ 的上半连续函数。我们可以定义 α 沿着一个素除子 D 的一般极小重数 (generic minimal multiplicity)

$$\nu(\alpha,D):=\inf_{x\in D}\nu(\alpha,x)$$

可以看到 $\nu(\alpha,D)=\sup_{\epsilon>0}\nu(T_{\min,\epsilon},D)$，且 $\nu(\alpha,D)=\nu(\alpha,x)$ 对 $x\in D$ 除开一个 D 的严格 Zariski 子集成立。

定义 3.4： 沿用上文的记号，我们定义拟有效类 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 的负部为

$$N(\alpha):=\sum_D \nu(\alpha,D)D$$

α 的 Zariski 投影或正部定义为

$$Z(\alpha):=\alpha-\{N(\alpha)\}$$

我们称分解 $\alpha=Z(\alpha)+\{N(\alpha)\}$ 为 α 的除子 Zariski 分解。

除子 Zariski 分解的正部有如下性质：

定理 3.1： 设 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar\partial}(X,\mathbb{R})$ 是一个拟有效类。

(1) Zariski 分解的正部 $Z(\alpha)$ 是修正数值有效的。

(2) 我们有 $Z(\alpha)=\alpha$ 当且仅当 α 是修正数值有效的。

(3) $Z(\alpha)$ 的体积等于 α 的体积。特别地，$Z(\alpha)$ 是大类当且仅当 α 是大类。

我们接着讨论 Zariski 分解中负部的性质

定义 3.5： (1) 一族素除子 $D_1, \cdots, D_q$ 被称作是例外的，当且仅当由同调类 D_i 生成的凸锥和修正数值有效锥 $\mathcal{MN}$ 仅在 0 处相交。

(2) 一个有效 $\mathbb{R}$-除子 E 被称作是例外的，当且仅当它的素除子分量构成一族例外除子集。

例外除子有以下性质：

定理 3.2： (1) 一个有效 $\mathbb{R}$-除子 E 是例外的，当且仅当 $Z(\{E\}) = 0$。

(2) 如果 E 是一个有效例外 $\mathbb{R}$-除子，我们有 $E = N(\{E\})$。

(3) 如果 $D_1, \cdots, D_q$ 是一族例外素除子，那么同调类 $\{D_1\}, \cdots, \{D_q\}$ 在 $NS_{\mathbb{R}}(X) \subset \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ 线性无关。特别地，例外素除子的长度不超过 X 的 Picard 数 $\rho(X)$。

当 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，其同调群 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上有一个典范的的双线性型 q：

- 当 X 是一个紧复曲面，我们定义 q 为相交形式：

$$q : \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \times \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \cdot \beta$$

- 当 X 是一个维数为 $n = 2m$ 的紧 hyper-Kähler 流形，取一个非 0 截面 $\sigma \in H^0(X, \Omega_X^2)$，我们定义 Beauville-Bogomolov 二次型：

$$q : \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \times \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \cdot \beta(\sigma\overline{\sigma})^{m-1}$$

将 σ 乘上一个非 0 常数，我们总是可以有

$$q(\alpha)^m = \int_X \alpha^{2m}$$

可以证明上述二次型 q 在 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$（或 $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X)$）上的符号为 $(1, h^{1,1}(X) - 1)$（或 $(1, \rho(X) - 1)$。利用二次型 q，我们可以在 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$（或 $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X)$）上定义子空间的正交补，对偶等。我们定义 $\mathcal{P}$ 为集合 $\{\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid q(\alpha) > 0\}$ 包含 Kähler 类的那个连通分支。我们记 $q(\alpha) := q(\alpha, \alpha)$。

二次型 q 与除子 Zariski 分解有着很好的相容性，对 Zariski 分解的正部，我们有：

命题 3.5： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上的典范二次型，我们有

(1) $\mathcal{MN} \subset \mathcal{E}^* \cap \overline{\mathcal{P}}$

(2) $q(D, D') \geqslant 0$ 对两个不同的素除子 D, D'

(3) $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}$

(4) $\mathcal{MN} = \mathcal{E}^*$。由于 $\overline{\mathcal{P}}$ 自对偶，我们有 $\mathcal{MN} \subset \overline{\mathcal{P}}$。

注释 3.3： 当 X 是一个紧复 Kähler 曲面，修正 Kähler 类与 Kähler 类一样，修正数值有效类和数值有效类一样。(见 Section 4.2.1 于[7])

Zariski 分解的负部亦可用二次型 q 刻画：

命题 3.6： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上的典范二次型，$D_1, \cdots, D_r$ 是一族素除子。那么这族除子是例外的当且仅当对称矩阵 $(q(D_i, D_j))$ 是严格负定的。

Zariski 分解本身也和二次型 q 相容：

定理 3.3： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上的典范二次型。设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是拟有效类，则它的除子 Zariski 分解是在如下意义下唯一的分解：它将 α 写成修正数值有效类（这里是 $Z(\alpha)$）与例外 $\mathbb{R}$-有效除子（这里是 $\{N(\alpha)\}$）的和，且在 q-意义下正交。

在最后，我们证明例外有效 $\mathbb{R}$-除子的刚性：

定理 3.4： 设 E 是一个紧复流形 X 上的例外有效 $\mathbb{R}$-除子。如果 $T \in \{E\}$ 是一个正闭流，则 $T = [E]$。

证明 由萧荫堂分解，我们有 $T \geqslant \sum_D \nu(T, D)[D]$。另一方面, 由极小重数的定义，$\nu(\{E\}, D) \leqslant \nu(T, D)$。于是 $T \geqslant [N(\{E\})]$。由于 E 是一个例外有效 $\mathbb{R}$-除子, 我们有 $N(\{E\}) = E$。故 $T \geqslant [E]$，$T - [E]$ 是同调类为 0 的正闭流。由 X 的紧性，dd^c-同调类为 0 的正闭流全为 0，于是 $T = [E]$。 ∎

3.3 刚性拟有效类的结构性定理

利用除子 Zariski 分解，我们对刚性拟有效类做初步的约化。

定理 3.5： 设 X 是一个紧复流形，$\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ 是一个拟有效类。则 α 是刚性类当且仅当 $Z(\alpha)$ 是刚性类。

证明 由除子 Zariski 分解，$\alpha = \{N(\alpha)\} + Z(\alpha)$。若 α 是刚性类，则 $Z(\alpha)$ 也刚性。反过来，若 $Z(\alpha)$ 是刚性类。设 T 是 α 当中的一个正闭流，由除子 Zariski 分解的

定义

$$T \geqslant N(\alpha)$$

于是 $T-N(\alpha)$ 是正闭流，同调类等于 $Z(\alpha)$。由 $Z(\alpha)$ 的刚性，$T-N(\alpha)$ 被唯一确定，于是 T 是唯一的。所以 α 是刚性类。 ∎

当 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的典范二次型。回忆 q 在 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$（或 $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X)$）上的符号是 $(1,h^{1,1}(X)-1)$（或 $(1,\rho(X)-1)$），于是我们有如下推论：

引理 3.1： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的典范二次型，α，β 是两个 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 中的元素。如果 $q(\alpha),q(\beta)\geqslant 0$，则以下不等式成立：

$$q(\alpha)\cdot q(\beta)\leqslant q(\alpha,\beta)^2$$

不等式取等号当且仅当 α 和 β 共线。

证明 我们先证明初等的 Aczel 不等式：

引理 3.2 (Aczel 不等式)： 设 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 和 $(b_0,b_1,\cdots,b_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 $(n+1)$-元数组。若

$$a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2\geqslant 0,\quad b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2\geqslant 0$$

则

$$(a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2)(b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2)\leqslant (a_0b_0-\sum_{j=1}^n a_jb_j)^2$$

不等式取等号当且仅当 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 和 $(b_0,b_1,\cdots,b_n)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中共线。

证明 考虑如下对称矩阵

$$H=\begin{pmatrix} a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2 & a_0b_0-\sum_{j=1}^n a_jb_j \\ a_0b_0-\sum_{j=1}^n a_jb_j & b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2 \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix} b_0 & -a_0 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} b_0 \\ -a_0 \end{pmatrix} = -\left[(b_0a_1-a_0b_1)^2+\cdots+(b_0a_n-a_0b_n)^2\right]\leqslant 0$$

矩阵 $\boldsymbol{H}$ 不可能严格正定，于是

$$\det(H)=(a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2)(b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2)-(a_0b_0-\sum_{j=1}^n a_jb_j)^2\leqslant 0$$

等号成立当且仅当 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 和 $(b_0,b_1,\cdots,b_n)$ 共线。 ∎

由于二次型 q 在 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的符号是 $(1,h^{1,1}(X)-1)$，我们取一组 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$-基 $\{e_0,e_1,\cdots,e_N\}$，使得二次型 q 在这组基下表示为 $\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$。

我们有 $\alpha=a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_Ne_N,\beta=b_0e_0+b_1e_1+\cdots+b_Ne_N$，各项系数满足

$$a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2\geqslant 0,\quad b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2\geqslant 0$$

由引理 3.2，我们有

$$(a_0^2-\sum_{j=1}^n a_j^2)(b_0^2-\sum_{j=1}^n b_j^2)\leqslant(a_0b_0-\sum_{j=1}^n a_jb_j)^2$$

这就是 $q(\alpha)\cdot q(\beta)\leqslant q(\alpha,\beta)^2$，等式取到当且仅当 α 和 β 共线。 ∎

作为推论，我们有

推论 3.2： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的典范二次型。设 $\alpha\in\mathcal{MN}$ 且 $q(\alpha)=0$。如果 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 是两个拟有效类的和，且 $q(\alpha_1)\geqslant 0$，那么 α_1 和 α_2 共线。

证明 由于 $0=q(\alpha)=q(\alpha,\alpha_1+\alpha_2)=q(\alpha,\alpha_1)+q(\alpha,\alpha_2)$ 是两个非负数的和，我们有 $q(\alpha,\alpha_1)=0$。注意 $q(\alpha)$ 和 $q(\alpha_1)$ 非负，利用引理 3.1我们可知 α 和 α_1 共线。于是 α_1 和 α_2 共线。 ∎

经过以上的准备，我们给出修正数值有效刚性类的结构定理

定理 3.6： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的典范二次型。$\alpha\in\mathcal{MN}$ 是一个刚性的修正数值有效类，T 是 α 中的唯一正闭流。对 T 做萧荫堂分解

$$T=\sum_{i\geqslant 1}a_i[D_i]+R$$

此处 $a_i\geqslant 0$，D_i 是素除子，$\nu(R,D)=0$ 对所有的素除子 D。我们有如下结果

(1) $\{R\}$ 是一个修正数值有效的刚性类。

(2) $T=R$ 或者 $R=0$。

(3) 若 $R=0$，则 $T=\sum_i a_i[D_i]$ 是一个有限和，且以下两种情况择其一：

(3.1) $T=a[D]$，这里 D 是一个素除子，满足 $q(D)\geqslant 0$，且 $a>0$。

(3.2) $T = a\sum_{i\in I} a_i[D_i]$，$\mathbb{Q}\ni a_i>0$，$a>0$。这里 I 是一个有限指标集，且 $\{D_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ 是一族例外素除子对所有的 $j\in I$。特别地，我们有 $2\leqslant \mathrm{Card}(I)\leqslant \rho(X)$。

证明 (1) 由极小重数的定义，$0=\nu(R,D)\geqslant \nu(\{R\},D)$，故 $\{R\}\in\mathcal{MN}$。由于 α 刚性，$\{R\}$ 也刚性。

(2) 注意到 $\{T\}=\alpha_1+\alpha_2$，这里 $\alpha_1=\sum_{i\geqslant 1}a_i\{D_i\}$ 是拟有效类，$\alpha_2=\{R\}$ 是修正数值有效类。由于 $\{T\}$ 刚性且修正数值有效，$\mathrm{vol}(\{T\})=q(\{T\})^{\frac{1}{2}}=0$。利用推论 3.2，我们可知 α_1 和 α_2 共线。由 α_1 及 α_2 的刚性，我们可知正闭流 $\sum_{i\geqslant 1}a_i[D_i]$ 和 R 共线。计算上述两正闭流在除子 D_i 上的 Lelong 数，可知他们两者必有一为 0。

(3) 若 $T=\sum_{i\geqslant 1}a_i[D_i]$ 是一个刚性的正闭流，且同调类位于 $\mathcal{MN}$ 里。则以下两种情况择其一：

(3.1) 存在一个 $i\geqslant 1$ 使得 $q(D_i)\geqslant 0$，$a_i>0$。于是

$$\{T\}=a_i\{D_i\}+\left(\sum_{j\geqslant 1, j\neq i}a_j\{D_j\}\right)=\alpha_1+\alpha_2$$

由于 $q(\{T\}=0)$，$\{T\}\in\mathcal{MN}$。利用推论 3.2，我们可知 α_1 和 α_2 共线。由刚性，我们可知 $a_i[D_i]$ 和 $\sum_{j\geqslant 1, j\neq i}a_j[D_j]$ 作为正闭流共线。计算 Lelong 数可知后者为 0，于是 $T=a_i[D_i]$。

(3.2) 否则 $T=\sum_{i\in I}a_i[D_I]$，$a_i>0$，$I\subset\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 是自然数的子集，且对所有的 $i\in I$，我们有 $q(D_i)<0$。

由于例外除子族的长度被 Picard 数 $\rho(X)$ 控制，我们令 N 是满足如下条件的最大正整数：对所有的子集 $J\subset I$，如果 $\mathrm{Card}(J)\leqslant N$，那么除子族 $\{D_j\}_{j\in J}$ 是例外的。于是 $N\geqslant 1$，$N\leqslant\rho(X)$ 且 $N\leqslant \mathrm{Card}(I)$。

若 $\mathrm{Card}(I)\geqslant N+2$，我们将指标集重新标号，得到

$$T=a_1[D_1]+\cdots+a_N[D_N]+a_{N+1}[D_{N+1}]+T'$$

这里 T' 是一个非零有效除子代表的正闭流，它的支撑除子不包含 $D_1,\cdots,D_{N+1}$，且 $\{D_j\}_{1\leqslant j\leqslant N+1}$ 不是例外除子族。考虑如下除子 Zariski 分解的正部

$$\alpha_0=Z(a_1[D_1]+\cdots+a_N[D_N]+a_{N+1}[D_{N+1}])$$

它是修正数值有效类，并且可被支撑在 $\{D_j\}_{1\leqslant j\leqslant N+1}$ 上的有效除子 T_0 表示。于是 $\{T\}$ 可写作 α_0 和一个有效除子类的和。由于 $q(\{T\})=0$，$\{T\}\in\mathcal{MN}$。利用推论 3.2，我们可知 α_0 和 $\{T\}-\alpha_0$ 共线。由刚性，我们可知 T_0 和 T 作为正闭流共线，这里 T_0 是 α_0 中的正闭流。由于 $\nu(T,D_{N+2})>0$，$\nu(T_0,D_{N+2})=0$，我们得到 $T_0=0$，这是矛盾。

若 $\mathrm{Card}(I)\leqslant N$，则 $\{D_i\}_{i\in I}$ 是例外族，$\{T\}$ 不可能修正数值有效。

于是 $\mathrm{Card}(I)=N+1$。由于 $N\leqslant\rho(X)-1$，我们有 $\mathrm{Card}(I)\leqslant\rho(X)$。

∎

注释 3.4：利用 Demailly 正则化定理，即文章[12]中 Corollary 7.6 中的不等式。当 X 为紧 Kähler 曲面时，上述定理中的 R 满足 $\nu(R,x)=0$，$R_{ac}^2=0$。

我们接着证明定理 3.6 (3.2) 中 a_i 的有理性:

命题 3.7：设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，q 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上的典范二次型。设 $D=\sum_{i=1}^{N}a_iD_i, a_i>0$ 是一个 $\mathbb{R}$-有效除子。如果 $\{D\}\in\mathcal{MN}$ 且 $q(D)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{vol}(D)=0$，则 $\{D\}=a\{D'\}$，这里 $a\in\mathbb{R}_{>0}$，D' 是一个 $\mathbb{Q}$-有效除子。

证明 由于 D 不是例外除子，所以除子族 $\{D_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 不是例外的。考虑如下除子 Zariski 分解的正部

$$\alpha_0=Z([D_1]+\cdots+[D_N])$$

α_0 不为 0，因为 $\{D_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 不是例外的。由 Zariski 分解的有理性，α_0 可被如下有效 $\mathbb{Q}$-除子表示

$$D_0=b_1D_1+\cdots+b_ND_N$$

此处 $b_1,b_2,\cdots,b_N\in\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$

将 D_0 乘上一个充分小正数，我们有 $D-D_0\geqslant 0$。于是 $\{D\}=\{D_0\}+\{D-D_0\}$ 是一个修正数值有效类和拟有效类的和。利用推论 3.2，我们可知 $\{D_0\}$ 和 $\{D\}$ 共线。于是 $\{D\}=a\{D_0\}$。 ∎

作为总结，紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形上的刚性修正有效类被分为如下三类

第一类：$T=a[D]$，这里 $a>0$，D 是一个素除子，满足 $q(D)=0$。

第二类：$\nu(T,D)=0$ 对所有的素除子 D。在曲面上，T 还满足 $\nu(T,x)=0$ 对所有 $x\in X$，$T_{ac}^2=0$。

第三类：$T=\sum_{i\in I}a_i[D_i]$ 形如定理 3.6 (3.2)。它们可以通过对第一类刚性类做

爆发（blow up）得到。

利用上述结构性定理，我们可以确定在拟有效类锥中极端的，刚性的拟有效类。

推论 3.3： 设 X 是紧复 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形，α 是上面的一个刚性拟有效类。那么 α 在锥 $\mathcal{E}$ 是极端的当且仅当

(1) $\alpha = \{D\}$，D 是一个素除子，满足 $q(D) < 0$。

(2) α 修正数值有效，且是第一类或第二类刚性类。

证明 若 α 是极端的，那么 $\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$ 是一个平凡和。如果 α 不是修正数值有效，那么 $\alpha = \{N(\alpha)\}$，并且 $N(\alpha)$ 只有一个素分量。如果 α 是修正数值有效，那么它只可能是第一类或第二类。

反过来，如果 $\alpha = \{D\}$ 对一个素除子 D，$q(D) < 0$。那么 α 是极端的，因为 $[D]$ 是一个极端的正闭流。如果 α 修正数值有效，$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 是两个拟有效类的和。若 α_i $(i = 1, 2)$ 中一个是修正数值有效的，那么根据推论 3.2，α_1 和 α_2 共线。若 α_i $(i = 1, 2)$ 都不修正数值有效的，考虑

$$\alpha = Z(\alpha_1) + \{N(\alpha_1)\} + Z(\alpha_2) + \{N(\alpha_2)\}$$

则 $\{N(\alpha_1)\} + \{N(\alpha_2)\} = c\alpha$ 对 $c > 0$，于是 α 是第三类刚性类，这是矛盾，故这种情况不会出现。于是 α 是极端的。 ∎

我们还可以对第二类刚性正闭流有如下的刻画

推论 3.4： 设 $\pi : \widetilde{X} \to X$ 是紧 Kähler 曲面或紧 hyper-Kähler 流形间的紧合（proper）双有理全纯映射。若 T 是 X 上的一个第二类正闭流，那么 π^*T 也是 $\widetilde{X}$ 上的一个第二类正闭流。特别地，π^*T 的 Lelong 数处处为 0。

证明 由于紧合双有理映射的纤维都连通，若 T 是刚性流，则 π^*T 也是刚性流。由于 $\{T\}$ 是数值有效的，$\pi^*\{T\}$ 也是数值有效的刚性类。设 $\pi : \widetilde{X}\backslash\widetilde{E} \to X\backslash E$ 是同构，则 π^*T 在 $\widetilde{X}\backslash\widetilde{E}$ 上非 0，且 $\nu(\pi^*T, D) = 0$ 在 $\widetilde{X}\backslash\widetilde{E}$ 上。故 π^*T 不可能是第一类或第三类刚性流，否则 π^*T 支撑在 $\widetilde{E}$ 上，$\pi^*T|_{\widetilde{X}\backslash\widetilde{E}} = 0$。故 π^*T 是 $\widetilde{X}$ 上的一个第二类正闭流。特别地，π^*T 的 Lelong 数处处为 0。 ∎

第 4 章　曲面上的一些刚性除子

在此章中，我们考虑紧复曲面 X 上的自相交数为 0 的光滑嵌入复曲线 C 的性质，尤其是考察拟有效类 $\{C\}$ 刚性的条件。

4.1　刚性有效类的初步刻画

在此节中，我们说明有效类的刚性是它邻域的性质。

命题 4.1：　设 X 是一个紧复流形，D 是上面的一个 $\mathbb{Z}$-有效除子（不必约化 (reduced)），记 $L := \mathcal{O}_X(D)$ 是全纯线丛。则如下的论断互相等价：

(1) $[D]$ 是刚性正闭流。

(2) 线丛 L 上的正奇异权 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有极小奇点。

(3) 存在 $\mathrm{Supp}(D)$ 的一个全纯邻域 U，使得线丛 $L|_U$ 上的任一正奇异权都不比 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有更小的奇点，除非它的奇点类和 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 一样。

(4) 对 $\mathrm{Supp}(D)$ 的任何一个全纯邻域 U，线丛 $L|_U$ 上的正奇异权都不比 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 有更小的奇点，除非它的奇点类和 $\varphi_D = \log|f_D|^2$ 一样。

证明 (1) 显然蕴含 (2)。我们证明 (2) 推出 (1)：

设 T 是同调类 $\{D\} \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ 里的具有极小奇点的正闭流。于是 $\nu(T, x) = \nu(\log|f_D|^2, x)$ 对所有的 $x \in X$。利用萧荫堂分解，我们得到

$$T \geqslant \nu(T, D)[D] = [D]$$

故 $T - [D]$ 是在同调类 $\{0\} \in \mathrm{H}^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ 的正闭流。由于 X 是紧集，我们有 $T = [D]$。故 $[D]$ 是刚性流。

(2) 蕴含 (4)：

否则我们可取 φ 是 $L|_U$ 上的正奇异权，它的奇点严格的比 φ_D 小。由定义，我们有 $C_0 > 0$ 使得

$$\varphi + C_0 \geqslant \varphi_D \quad 在U上$$

由于 φ_D 在 $U \backslash D$ 外光滑，$\varphi - \varphi_D$ 是一个定义于 $U \backslash D$ 的上半连续函数。取 D 的两个开邻域 $V_2 \subset V_1$，使得 $\overline{V_2} \subset V_1$，$\overline{V_1} \subset U$。由于 $\overline{V_1} \backslash V_2$ 是紧集，我们有

$$C_1 \geqslant \varphi - \varphi_D \quad 在\overline{V_1}\backslash V_2上$$

于是我们可定义 L 的正奇异权如下：

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\max(\varphi_D,\varphi-C_1) & x\in V_1\\ \varphi_D & x\in X\backslash V_1\end{cases}$$

由于在 $V_1\backslash\overline{V_2}$ 上 $C_1\geqslant\varphi-\varphi_D$，$\max(\varphi_D,\varphi-C_1)=\varphi_D$ 对 $x\in V_1\backslash\overline{V_2}$。故 $\widetilde{\varphi}$ 良好定义。

另一方面，注意到

$$\widetilde{\varphi}+C_0\geqslant\varphi_D$$

由于 φ_D 具有极小奇点，我们有 $\varphi_D+C_3\geqslant\widetilde{\varphi}$。这与 φ 在 U 上奇点比 φ_D 严格小矛盾。证毕。

(3) 蕴含 (2)：如果我们有一个 X 上 L 的正奇异权 φ，它的奇点比 φ_D 小，则 $\varphi|_U$ 的奇点比 $\varphi_D|_U$ 小。利用 (3)，我们知道 $\varphi|_U$ 和 $\varphi_D|_U$ 的奇点类一样，于是 $\varphi-\varphi_D$ 在 U 上有界（除去 D 处）。由于 φ_D 在 $X\backslash D$ 上光滑，我们有 $\varphi-\varphi_D$ 在 $\overline{X\backslash U}$ 上有界。于是在 X 上，φ 的奇点类和 φ_D 一样。 ∎

注释 4.1： 对一般的复流形 X 及上面的一个线丛 L，配备正奇异权 φ。考虑如下条件：

(1) φ 具有极小奇点。

(2) 线丛 L 上的任一正奇异权都不比 φ 有更小的奇点，除非它的奇点类和 φ 一样。

若 X 是紧复流形，上述两论断等价，因为此时 L 总存在具有极小奇点的正奇异权。若 X 不是紧的，则条件 (1) 蕴含 (2)，反过来不一定行。

D 的刚性是它的邻域性质，我们有如下结果：

命题 4.2： 设 X 与 X' 是两个紧复流形，D 和 D' 分别是 X 与 X' 上的有效除子。假设存在 D 的全纯邻域 U （分别地，D' 的全纯邻域 U'），以及一个双全纯映射

$$g:U\to U'$$

其将 D 映到 D'。则 $[D]$ 是刚性的当且仅当 $[D']$ 是刚性的。

证明 注意 g 将 $\mathcal{O}(D)|_U$ 的正奇异权一对一的映到 $\mathcal{O}(D')|_{U'}$ 的正奇异权，并且它保持奇点类和典范权 $\log|f_D|^2$。利用命题4.1，我们得到结果。 ∎

回忆紧复曲面上的结果

命题 4.3 (Proposition 4.3 in[13])： 设 X 是一个紧复曲面，C 是其上的一个光滑嵌入的有理曲线。如果 $(C^2)=0$，则存在一个紧合双有理映射（modification）$\varphi:X\to Y$，此处 Y 是一个直纹面，C 与例外除子 $\mathrm{Exc}(\varphi)$ 不交，且 $\varphi(C)$ 是 Y 的一个纤维。

作为推论，我们有

推论 4.1： 设 X 是一个紧复曲面，C 是其上的一个光滑嵌入的有理曲线。则 C 是刚性除子当且仅当它是例外除子，也即 $(C^2) < 0$。

证明 当 $(C^2) < 0$，C 是例外除子，进而是刚性除子。当 $(C^2) > 0$，C 是大除子，此时它不可能刚性。

于是我们可设 $(C^2) = 0$。利用上述命题，我们取上文的紧合双有理映射 $\varphi : X \to Y$。取 C 的全纯邻域 U，使得 U 避开 $\mathrm{Exc}(\varphi)$，于是 φ 将 U 双全纯地映到 Y 的一个开集 V。此处 V 是 $\varphi(C)$ 的一个全纯邻域。由于 $\varphi(C)$ 是纤维丛的一个纤维，它不可能刚性。由命题4.2，C 不可能刚性。 ∎

4.2 Ueda 邻域理论

在前小节的讨论中，我们知道除子的刚性是它的邻域性质。这启发我们去研究除子的邻域。此方面的一个重要理论被称作 Ueda 理论，它由 Ueda 最先在文章[14]提出。也可见 Neeman 的总结文章[15]与 T.Koike 近期的一系列工作。

在正式讨论前，我们介绍平坦复线丛 (flat line bundle) 的概念以及它的一个判据。

定义 4.1： 设 E 是复流形 M 上的一个复线丛。我们称 E 是一个平坦复线丛，如果存在 M 的一个开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 及相应局部坐标 ζ_i，使得转移映射 $t_{ik} = \zeta_i/\zeta_k$ 的模长为 1。

对平坦复线丛，我们有如下结果

命题 4.4 (Proposition 1，于[14])： 设 E 是复流形 M 上的一个复线丛，$c_{\mathbb{R}}(E) \in H^2(X,\mathbb{R})$ 是 E 的陈类。我们有

(1) 如果 E 是一个平坦复线丛，则 $c_{\mathbb{R}}(E) = 0$。

(2) 如果 M 是紧的，且 $\dim(\mathrm{H}^1(M,\mathbb{C})) = 2\dim(\mathrm{H}^1(M,\mathcal{O}))$。则 E 是一个平坦复线丛当且仅当 $c_{\mathbb{R}}(E) = 0$。注意到当 M 是 Kähler 流形时（特别地，紧复曲线时），上述同调群的维数条件自然满足。

考虑如下的情形：设 C 是复曲面 X 上的一条光滑嵌入的紧闭曲线，满足 $(C^2) = 0$，等价地 $c_{\mathbb{R}}(N_{C/X}) = \deg(N_{C/X}) = 0$。于是 C 上的全纯法丛 $N_{C/X}$ 是一条平坦复线丛，我们可取 C 上的一族开覆盖 $\{U_j\}_j$ 及一族转移函数

$$t_{jk} : U_{jk} = U_j \cap U_k \to U(1)$$

使得 $N_{C/X} = \{U_j \cap U_k, t_{jk}\}_{jk} \in \mathrm{H}^1(C, \mathcal{O}_C^*)$。

对上述 C，通过修改上述开覆盖（具体构造见[14]），我们可取 C 的一管状邻域 V 以及开覆盖 $V = \cup V_j$ ，满足 $V_j \cap C = U_j$。此时 V_j 有全纯坐标 (z_j, x_j) 使得 $U_j = \{z_j = 0\} \cap V_j$，且 $z_k/z_j = t_{jk} \in U(1)$ 在 $U_j \cap U_k$ 上。我们称 $\{(V_j, z_j, x_j)\}$ 是类型 n 的系统，如果 $\mathrm{mult}_{U_j \cap U_k}(t_{jk}z_j - z_k) \geqslant n+1$，此即

$$t_{jk}z_j - z_k = f_{jk}(x_k)z_k^{n+1} + (\text{高阶项})$$

此处 f_{jk} 是全纯函数。由定义，任何一类型为 m 的系统也是类型为 n 的系统，这里 $m \geqslant n$。

根据 Ueda[14] 的结果（于 p.588[14]），我们定义 Ueda 类如下

定义 4.2： 假设我们有如上定义的类型 n 系统，则 $\{U_j \cap U_k, f_{jk}\}_{j,k}$ 满足余圈（cocycle）条件。且

$$u_n(C, X) := \{U_j \cap U_k, f_{jk}\}_{j,k} \in \mathrm{H}^1(C, N_{C/X}^{-n})$$

定义了如上的一个同调类，这被称为 (C, X) 的 n-阶 Ueda 类。

在 Ueda 的文章[14]中，他证明了 Ueda 类不依赖于上述开覆盖与坐标的选取，且 $u_n(C, X) = 0$ 当且仅当存在一个类型为 $n+1$ 的系统。于是我们有如下两种互不相交的条件：

(1) 存在一个正整数 n 使得 $u_m = 0$ 对 $m < n$，且 $u_n \neq 0$。此时我们记 $\mathrm{type}(C, X) := n$。

(2) $u_m = 0$ 对所有正整数 m。此时我们记 $\mathrm{type}(C, X) = \infty$。

利用以上概念，Ueda 对 (C, X)，或 C 在 X 中的全纯邻域做如下分类

(α): 存在一个正整数 m 使得 $u_m \neq 0$ 。

(β): 存在 C 的一个全纯邻域 V 使得 $\mathcal{O}(C)|_V$ 是酉平坦，即 $\mathcal{O}(C)|_V$ 有一个光滑的平坦度量。此时 Ueda 还将其分为更细的两类：

(β'): 若 $N_{C/X}$ 是阶为 m 的绕元，我们可取紧合全纯映射 $f : V \to \mathbb{D}$ 使得 $m[Y] = f^{-1}(\{0\})$，此时我们可能需将 V 合适的收缩。

(β'')： $N_{C/X}$ 不是绕元。

(γ): 余下的情况。

注释 4.2： 上述有关 (C, X) 的各概念，如 Ueda 类等，仅依赖于 C 在 X 中的邻域。Ueda 类衡量的是 C 上法丛 $N_{C/X}$ 延拓成 C 邻域上的酉平坦线丛的障碍。

4.3 (α) 型的情况

当 $\mathrm{type}(C,X)<\infty$，或 C 的邻域是 (α) 型的，我们有如下结果：

定理 4.1 (Theorem 2 于[14]，Ueda1982)： 设 V 是 C 在 X 里的一个开邻域，设 Ψ 是 $V\backslash C$ 上的一个多重次调和函数。如果 $\mathrm{type}(C,X)=n$，且存在正实数 $a<n$ 使得 $|\Psi(p)|=o(\mathrm{dist}(p,C)^{-a})$ 当 p 趋于 C，此处 $\mathrm{dist}(p,C)$ 是 p 和 C 间的欧式度量。则存在 C 的一个邻域 V_0 使得 Ψ 在 $V_0\backslash C$ 为常数。

作为推论，我们有

推论 4.2 (Theorem 1.1 于[16]，Koike2015)： 设 X 是一个复曲面，C 是上面的一个光滑嵌入的紧复曲线。若它的邻域是 (α) 型，则对 C 的任一邻域 V，奇异权 $\log|f_C|^2$ 在 V 上具有极小奇点。特别地，如果 X 是紧集，$[C]$ 是一个刚性除子。

证明 对 C 的任一邻域 V，设 φ 是 $L=\mathcal{O}(D)|_V$ 上的奇异权，带有流意义下的半正曲率。我们先假设 φ 的奇点比 $\log|f_C|^2$ 小，此即

$$\Psi:=\varphi-\log|f_C|^2\geqslant C_0\quad 在V\backslash C$$

由于 $\log|f_C|^2$ 在 $V\backslash C$ 上光滑，局部上调和，我们可知函数 Ψ 是 $V\backslash C$ 上的次调和函数。当 p 靠近 C 时，利用局部坐标，设 $C=\{z=0\}$，我们有

$$\Psi(p)\leqslant-2\log|f_C|^2\sim-2\log|z|^2=o(\frac{1}{|z|^{0.1}})\quad \text{as } p\to D$$

利用定理 A.5，我们可以找到邻域 C 的邻域 V_0 使得 Ψ 在 $V_0\backslash D$ 上是常数，故 $\varphi=C+\log|f_C|^2$ 在 $V_0\backslash D$，考虑多重次调和函数可以唯一的延拓至解析集，我们有 $\varphi=C+\log|f_C|^2$ 于 V_0。

对一般的 $L=\mathcal{O}(D)|_V$ 上的奇异权 φ。定义 $\widetilde{\varphi}=\max(\varphi,\log|f_C|^2)$，它奇点比 $\log|f_C|^2$ 且是具有半正曲率的奇异权。由上述证明，我们可取一个更小的邻域 V_0 使得 $\widetilde{\varphi}=C+\log|f_C|^2$，于是在 V_0 上 φ 奇点比 $\log|f_C|^2$ 小。由于 $\log|f_C|^2$ 在 $V\backslash C$ 上局部光滑，在 $V\backslash V_0$ 上，φ 奇点比 $\log|f_C|^2$ 小。故 φ 在 V 上具有极小奇点。

$[C]$ 的刚性根据命题4.1导出。 ∎

4.4 (β) 型的情况

当 (C,X) 是 (β) 型的，我们可以找到 C 的邻域 V，使得 $L=\mathcal{O}(C)$ 在 V 上酉平坦（unitary flat），即存在一个光滑度量使得其曲率处处为 0。于是典范权的奇点比这个光滑度量对应的权的奇点严格大，C 不可能刚性。

事实上，Koike 最近导出了一个更强的结果

定理 4.2 (Corollary 1.5 于[17]，Koike2021)：设 X 是紧 Kähler 曲面，C 是其上一光滑嵌入的曲线，满足 $(C^2)=0$。则同调类 $\{C\}$ 半正（semi-positive）当且仅当 (C,X) 是 (β) 型的。

4.5 一个例子

例 4.1 (Example 3.5 于[16]，Example 1.7 于[2])：设 C 是一条亏格大于 0 的光滑射影曲线，$L\in \mathrm{Pic}_0(C)$ 是其上的一陈类为 0 的线丛，满足 $\mathrm{H}^1(C,L)\neq 0$。考虑 C 上的向量丛 E，满足如下正合列

$$0\longrightarrow L\longrightarrow E\longrightarrow \mathcal{O}(C)\longrightarrow 0$$

且对应于同调类 $e\in \mathrm{Ext}(\mathcal{O}(C),L)=\mathrm{H}^1(C,L)$。记除子 $D:=\mathbb{P}(\mathcal{O}(C))\subset X:=\mathbb{E}$，则我们有如下图表

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(C))=D\xrightarrow{i}X=\mathbb{P}(E)\xrightarrow{\pi}C$$

此时 $\pi\circ i$ 是同构，且 $N_{D/X}=(\pi\circ i)^*L^{-1}$。由 Proposition 7.6 于[15]，我们可知

$$\mathrm{H}^1(D,N_{D/X}^{-1})\ni u_1(D,X)=(\pi\circ i)^*e$$

于是 $u_1(D,X)\neq 0$ 当且仅当 $e\neq 0$，即 $E\neq \mathcal{O}(C)\oplus L$。若向量丛不分裂，则 D 始终为刚性除子。

第 5 章　曲面上 Green 流的刚性

在本章里，我们主要研究如下的动力系统 (X, f)，其中 (X, ω) 是一个紧复 Kähler 曲面，$f : X \to X$ 是一个全纯自同构。

5.1　曲面动力系统的不变量

从动力系统的角度，我们对 (X, f) 给出以下不变量：

(1) 我们先介绍动力系统 (X, f) 的拓扑熵 $h_{top}(f)$：

对 X 的两个开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 和 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$，我们定义如下加细开覆盖 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U_i \cap V_j\}_{i\in I, j\in J}$。定义开覆盖的拉回：$f^{-1}\mathcal{U} := \{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$。

由于 X 是一个紧集，记 $\mathrm{H}(\mathcal{U})$ 为 $\mathcal{U}$ 的子覆盖数量最小值的对数。我们可以证明

$$\mathrm{H}(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leqslant \mathrm{H}(\mathcal{U}) + \mathrm{H}(\mathcal{V})$$

于是以下极限存在：

$$h(f, \mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{H}(\mathcal{U} \vee f^{-1}\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{U})$$

我们定义拓扑熵 $h_{top}(f)$ 为：

$$h_{top}(f) := \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U})$$

(2) 另一个重要不变量是动力度（dynamical degrees）：注意 f 诱导出上同调群的线性映射 $f^* : H^{p,p}(X, \mathbb{R}) \to H^{p,p}(X, \mathbb{R})$，$0 \leqslant p \leqslant 2$。我们定义 p-动力度 $\lambda_p(f)$ 为 f^* 的最大特征值。由线性代数，$\lambda_p(f)$ 等于 f^* 的谱半径，还等于

$$\lambda_p(f) = \limsup_{n\to\infty} ||(f^n)^*||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\int_X (f^n)^*\omega \wedge \omega)^{\frac{1}{n}}$$

由于 f 是微分同胚，我们有 $\lambda_0(f) = \lambda_2(f) = 1$。可以证明动力度有对数凹性，于是我们有 $\lambda_1(f) \geqslant 1$。

当 X 是紧 Kähler 曲面，我们有如下 Gromov-Yomdin 定理：

定理 5.1：　在以上假设下，我们有

$$h_{top}(f) = \log(\lambda_1(f))$$

我们之后将讨论那些 $h_{top}(f) > 0$ 的动力系统，等价地，此时 $\lambda_1(f) > 1$。我们称这样的 f 是双曲的。

注意 f^* 保持 $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上的相交形式 q，而 q 的符号是 $(1, h^{1,1} - 1)$，利用线性代数，我们有

命题 5.1 (Proposition 3.1 于[18]): 若 f 是双曲的，则 f^* 是半单的，且恰有一特征值大于 1 与特征值小于 1，将它们记为 $\lambda_1(f)$ 和 $\lambda_1(f)^{-1}$，对应的特征向量为 1 维。它们的特征空间 $\mathbb{R}v_+$ 和 $\mathbb{R}v_-$ 包含在 q 的零化空间里，且是零化空间里唯一的 f^*-不变一维子空间。这两条线相对于格点 $\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}}(X)$ 是无理的。

5.2 Green 流

假设 (X, f) 是紧复 Kähler 曲面上的一个双曲自同构系统，我们在此节解释 Green 流的构造，这是我们如下定理的结果：

定理 5.2 (Proposition 7.3 于[19]): $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 存在唯一的类 c_+ 和 c_- 满足如下条件：

$$c_+ \smile \{\omega\} = c_- \smile \{\omega\} = 1, \quad f^*(c_+) = dc_+, \quad f^*(c_-) = d^{-1}c_-$$

这里 $d = \lambda_1(f)$。并且 c_+ 和 c_- 在数值有效类 $\mathcal{N}$ 中。取超平面

$$H := \{c \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid c_+ \smile c = c_- \smile c = 0\}$$

我们得到 f^* 不变的分解

$$\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}c_+ \oplus \mathbb{R}c_- \oplus H$$

此时相交形式在 H 负定。

证明 记 $\mathcal{K}$ 为 X 的 Kähler 锥。由于 f^* 保持 $\mathcal{K}$，利用线性代数的 Perron-Frobenius 定理，我们可取 $0 \neq c_+ \in \overline{\mathcal{K}}$ 使得 $f^*c_+ = dc_+$，这里 d 是 f^* 的谱半径。由命题 5.1，这个 c_+ 在差一个常数的意义下唯一。通过考虑 f^{-1}，我么类似地得到 c_-。将它们称上合适的系数，可设 $c_+ \smile \{\omega\} = c_- \smile \{\omega\} = 1$。其余的结果可直接验证。 ∎

注意到 c_+ 和 c_- 均为数值有效类，它们包含正闭流。我们将在之后说明这个正闭流是唯一的，且具有 Hölder 连续的局部势。我们称这些正闭流为 **Green 流**。

5.3 DSH 函数与估计

在此节中，我们引入 DSH 函数，并利用 Skoda 型的不等式导出我们之后所需的估计。我们此处考虑一般情形，设 X 是一个紧 Kähler 流形。

定义 5.1： X 上的函数被称为 DSH （differences of quasi-psh functions），如果在一个多重极集（pluripolar set）之外等于两个拟多重次调和函数的差。我们说两个 DSH 函数是等价的，如果他们在某个多重极集之外相等。我们记 $\mathrm{DSH}(X)$ 为 DSH 函数集合模掉以上等价关系构成的空间。

利用拟多重次调和函数的性质，我们有：

命题 5.2： 设 (X,ω) 是一个紧复 Kähler 流形，则：

(1) $\mathrm{DSH}(X) \subset L^p_{loc}$ 对 $1 \leqslant p < \infty$。

(2) 若 $u \in \mathrm{DSH}(X)$，则存在两个在同一同调类里的正闭流 S_1, S_2 使得

$$S_1 - S_2 = \mathrm{dd}^c u$$

反过来，对于任何两个在同一同调类里的正闭流 S_1, S_2，我们可取 $u \in \mathrm{DSH}(X)$（差一个常数意义下唯一）使得

$$S_1 - S_2 = \mathrm{dd}^c u$$

对一个流 S，若它能表示为两个正闭流的差，即 $S = S_1 - S_2$，我们定义如下的范数

$$||S||_* = \inf_{S_1,S_2}(||S_1|| + ||S_2||)$$

这里正闭流的范数是它的质量，它的定义依赖于 X 上的 Kähler 形式 ω 的选取。此处我们如下定义：$||S_1|| = \int_X \omega^{n-1} \wedge S_1 = \{\omega\}^{n-1} \smile \{S_1\}$。

于是我们定义 $\mathrm{DSH}(X)$ 上的一个范数：

$$||u||_{\mathrm{DSH}} := |\int_X u\omega^k| + ||\mathrm{dd}^c u||_*$$

我们有：

命题 5.3： 在以上的记号下：

(1) $(\mathrm{DSH}(X), ||\cdot||_{\mathrm{DSH}})$ 是一个 Banach 空间。

(2) 以下度量（$1 \leqslant p < \infty$）

$$||u||' := ||u||_{L^p} + ||\mathrm{dd}^c u||_*$$

和度量 $||\cdot||_{\mathrm{DSH}}$ 等价。

我们介绍一种 Skoda 型的不等式如下：

命题 5.4： 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{DSH}(X)$ 中的有界函数族，则我们可找到一个正数 $\alpha=\alpha(\mathcal{F})$ 使得

$$\int_X e^{\alpha|u|}\omega^k \leqslant C \quad u\in\mathcal{F}$$

证明 对任一 $u\in\mathcal{F}$，我们可取正闭流 S_1,S_2 使得

$$S_1-S_2=\mathrm{dd}^c u,\quad ||S_1||,||S_2||\leqslant C(\mathcal{F})$$

故 $\{S_1,S_2\}_{u\in\mathcal{F}}$ 在正闭流空间里预紧，其同调类 $\{\{S_1\},\{S_2\}\}_{u\in\mathcal{F}}$ 是 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 里的有界集，则我们可取充分正的 Kähler 形式 ω，使得

$$\{u_1,u_2\}_{u\in\mathcal{F}}\subset \mathrm{PSH}(X,\omega)$$

设 $u_1,u_2\in\mathrm{PSH}(X,\{S_1\})$ 使得

$$u_1-u_2=u,\quad \int_X u_1\omega_0^n=0$$

由于 $\mathcal{F}$ 有界，我们有

$$|\int_X u\omega_0^n|=|\int_X u_2\omega_0^n|\leqslant C(\mathcal{F})$$

于是上述 $\{u_1,u_2\}_{u\in\mathcal{F}}$ 是 $\mathrm{PSH}(X,\omega)$ 中的紧集，利用 Skoda 估计

$$\int_X e^{-\alpha u_1}\omega_0^n\leqslant C(\mathcal{F}),\quad \int_X e^{-\alpha u_2}\omega_0^n\leqslant C(\mathcal{F})$$

注意 $|u|\leqslant|u_1|+|u_2|+C(\mathcal{F})$，我们证明完成。 ∎

利用此不等式，我们有如下估计：

命题 5.5： 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{DSH}(X)$ 中的有界函数族，ν 是一个绝对连续的概率测度，其密度是有界函数。则我们可取一正数 $A=A(\mathcal{F})>0$ 使得

$$\int_X |u|\mathrm{d}\nu\leqslant A(1+\log^+||\nu||_\infty)\quad u\in\mathcal{F}$$

其中 $\log^+:=\max(0,\log)$

证明 取 $\alpha=\alpha(\mathcal{F})$ 使得

$$\int_X e^{\alpha|u|}\omega^k\leqslant C$$

于是

$$\alpha\int_X|u|\mathrm{d}\nu=\int_X\log(e^{\alpha|u|})\mathrm{d}\nu\leqslant\log\int_X e^{\alpha|u|}\mathrm{d}\nu\leqslant\log^+(||\nu||_\infty)+\log\int_X e^{\alpha|u|}\omega^k$$

第一个不等式来自 Jensen 不等式，于是命题得证。 ∎

5.4 Green 流的刚性与连续性

本章证明前所定义 Green 流的刚性与连续性：

定理 5.3： 设 f 是紧 Kähler 曲面 X 的双曲自同构。则前述 Green 流 T^+ 是刚性流，且具有 Hölder 连续的局部势函数。而且 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}T^+$ 是正闭流锥当中的一条端射线（extremal ray）。相同的结论对 T^- 也成立。

注释 5.1： $\mathbb{R}_{\geqslant 0}T^+$ 在锥的极端性可由之前的推论 3.3得到。

证明 我们先证明 Green 流的刚性：设 S 是同调类 $\{T^+\} = c_+$ 中的另一个正闭流，取

$$S_n = d^n (f^n)_* S$$

于是 $S_n \in \{T^+\}$ 且 $S = d^{-n}(f^n)^* S_n$。记 u_n 为满足以下条件的唯一 DSH 函数

$$S_n - T^+ = \mathrm{dd}^c u_n, \quad \int_X u_n \omega^2 = 0$$

于是 $||u||_{\mathrm{DSH}} = ||\mathrm{dd}^c u_n||_* \leqslant ||S_n|| + ||T^+|| = 2c_+ \cdot \{\omega\}$，$\{u_n\}$ 在 $\mathrm{DSH}(X)$ 有界。

注意到

$$S - T^+ = d^{-n}(f^n)^*(S_n - T^+) = d^{-n}(f^n)^*(\mathrm{dd}^c u_n) = d^{-n}\mathrm{dd}^c(u_n \circ f^n)$$

若 $S - T^+ \neq 0$，我们可取一光滑 $(1,1)$-形式 φ_0 使得

$$0 \neq \langle S - T^+, \varphi_0 \rangle = d^{-n}\langle \mathrm{dd}^c(u_n \circ f^n), \varphi_0 \rangle = d^{-n}\langle u_n \circ f^n, \mathrm{dd}^c \varphi_0 \rangle = d^{-n}\langle u_n, (f^n)_* \mathrm{dd}^c \varphi_0 \rangle$$

将 φ_0 乘上一个足够小常数，我们取一个绝对连续，有界密度的概率测度 ν 使得以下不等式逐点成立

$$|\frac{\mathrm{dd}^c \varphi_0}{\omega^2}| \leqslant \frac{\nu}{\omega^2}$$

由于 $\mathcal{F} = \{u_n\}$ 在 $\mathrm{DSH}(X)$ 有界，由命题5.5：

$$|\langle u_n, (f^n)_* \mathrm{dd}^c \varphi_0 \rangle| \leqslant \int_X |u_n| (f^n)_* \nu \leqslant A(\mathcal{F})(1 + \log ||(f^n)_* \nu||_\infty) = O(n)$$

于是

$$0 \neq \langle S - T^+, \varphi_0 \rangle = d^{-n} O(n) = 0$$

这是矛盾，于是 $S = T^+$，$\{T^+\} = \{c_+\}$ 是刚性类。考虑 f^{-1}，我们类似地得到 c_- 也是刚性的。

为了证明 T^+ 局部势的 Hölder 连续性，我们需要如下引理：

引理 5.1 (Lemma 6.2 于[19])： 设 X 是一度量空间，其半径有限，$\Lambda : X \to X$ 是

一 Lipshitz 映射，满足

$$\mathrm{dist}(\Lambda(a), \Lambda(b)) \leqslant A\mathrm{dist}(a, b)$$

这里 $A > 1$。设 v 是 X 上的一有界 Lipschitz 函数。于是以下级数

$$\sum_{n\geqslant 0} d^{-n} v \circ \Lambda^n$$

逐点的收敛到一个 β-Hölder 连续的函数，此处 β 是任一满足 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 及 $\beta < \frac{\log d}{\log A}$ 的数。

于是我们可证明 T^+ 势函数的 Hölder 连续性：取 c_+ 中的一个光滑代表元 θ_+，我们声称（随后证明）：

$$d^{-n}(f^n)^*(\theta_+) \to T^+$$

由于 $d^{-1} f^* c_+ = c_+$，我们可取一光滑函数 v^+ 使得

$$d^{-1} f^* \theta_+ = \theta_+ + \mathrm{dd}^c v^+$$

由归纳法，我们有

$$d^{-n}(f^n)^*(\theta_+) = \theta_+ + \mathrm{dd}^c(v^+ + d^{-1} v^+ \circ f + \cdots + d^{1-n} v^+ \circ f^{n-1})$$

取极限，利用上文的声称

$$T^+ = \theta_+ + \mathrm{dd}^c v_\infty^+$$

此处

$$v_\infty^+ = \sum_{n\geqslant 0} d^{-n} v^+ \circ f^n$$

是 Hölder 连续函数，此处用到了引理 5.1。

我们此处证明上文的声称：注意

$$d^{-n}(f^n)^*(\theta_+) - T^+ = d^{-n}(f^n)^*(\theta_+ - T^+)$$

取 $\theta_+ - T^+ = \mathrm{dd}^c u$，于是

$$|\langle d^{-n}(f^n)^*(\theta_+) - T^+, \varphi\rangle| = d^{-n}|\langle u, (f^n)_*(\mathrm{dd}^c \varphi)\rangle| \leqslant O(1) d^{-n} n$$

故 $d^{-n}(f^n)^*(\theta_+) \to T^+$。 ∎

第 6 章　拟有效类的直径函数

6.1　定义与性质

本章我们考察一般情形，设 (X,ω) 是一个紧复 Kähler 流形，μ 是 X 上的一个严格正的光滑测度。对拟有效类 α 和它的一个光滑代表元 θ，我们定义如下空间

$$\mathrm{PSH}_n(X,\theta) := \{\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta) | \int_X \varphi \mathrm{d}\mu = 0\}$$

它被称为正规化的 θ-psh 函数空间，是 $L^p(X,\mu)(p \geqslant 1)$ 中的紧集。考察上述集合元素两两之差，我们得到以下集合

$$\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) := \{f = \varphi_1 - \varphi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{PSH}_n(X,\theta)\}$$

注意到

- $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) \subset \mathrm{DSH}(X)$，且 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 仅依赖于同调类 α，与 θ 的选取无关。于是我们可记 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) =: \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$
- $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$ 在 $\mathrm{DSH}(X)$ 空间（配备 DSH 范数）中有界，还是 $L^p(X,\mu)$ 中的紧集。且

$$\cup_{\alpha\in\mathcal{E}} \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha) = E$$

  这里 $E = \{f \in \mathrm{DSH}(X) \mid \int_X f \mathrm{d}\mu = 0\}$

$\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$ 还有如下性质

命题 6.1：　设 $\{\theta\}, \{\theta_1\}, \{\theta_2\}$ 为拟有效类，$\theta, \theta_1, \theta_2$ 是光滑形式，则

(1) $t\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) \subset \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 对 $t \in [-1,1]$。于是我们可称 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 是平衡的（balanced）。

(2) $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 是凸集。结合上一个结果，我们可称 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 是绝对凸的（absolutely convex）。

(3) $s\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) = \Delta\mathrm{PSH}_n(X,s\theta)$ 对 $s \geqslant 0$。

(4) $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta_1) + \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta_2) \subset \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta_1+\theta_2)$。

(5) 设 $\alpha_i \to \alpha$ 是一列收敛的拟有效类，则

$$\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha) \supset \bigcup_{k\geqslant 1}\bigcap_{j\geqslant k} \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha_j) =: \limsup \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha_i)$$

特别地，设 ω 是 X 上的一个 Kähler 形式，则

$$\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)=\bigcap_{t>0}\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta+t\omega)$$

证明 (1) 对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$, $t\in[0,1]$, 我们有 $t\varphi_1+(1-t)\varphi_2\in\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$，故 $t(\varphi_1-\varphi_2)=t\varphi_1+(1-t)\varphi_2-\varphi_2\in\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$。

(2) 取 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 中的元素 $f_1=\varphi_1-\psi_1$, $f_2=\varphi_2-\psi_2$, 其中 φ_i 和 ψ_i 是 $\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 中元素。对 $t\in[0,1]$，我们有

$$t\varphi_1+(1-t)\varphi_2\in\mathrm{PSH}_n(X,\theta),\quad t\psi_1+(1-t)\psi_2\in\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$$

于是

$$tf_1+(1-t)f_2\in\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$$

故 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta)$ 是凸集。

(3) 由定义可得。

(4) 由定义可得。

(5) 只需证

$$\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)\supset\bigcap_{j\geqslant k}\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha_j)$$

设 θ_i,θ 分别是 α_i,α 里唯一的调和代表元。由于 $\alpha_i\to\alpha$，我们有 $\theta_i\to\theta$，此处我们取光滑微分形式的 L^2-拓扑 (注意调和形式空间是有限维的，其上的 L^2-范数拓扑等同于其同调群上的拓扑)。

对 $f\in\cap_{j\geqslant k}\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha_j)$，我们有

$$f=\varphi_1^{(j)}-\varphi_2^{(j)},\quad \varphi_1^{(j)},\varphi_2^{(j)}\in\mathrm{PSH}_n(X,\theta_j), j\geqslant k$$

注意存在一充分大的常数 $A>0$，使得

$$\mathrm{PSH}_n(X,\theta_j)\subset\mathrm{PSH}_n(X,A\omega)$$

后者是 $L^1(\mu)$ 拓扑下的紧集。于是我们可取 $\varphi_1^{(j)}$ 与 $\varphi_2^{(j)}$ 的收敛子列（为方便起见，我们设原序列收敛)，使得

$$\varphi_1^{(j)}\to\varphi_1,\varphi_2^{(j)}\to\varphi_2\quad 于\quad \mathrm{PSH}_n(X,A\omega)$$

于是我们有流的收敛

$$T_1^{(j)}:=\theta_i+\mathrm{dd}^c\varphi_1^{(i)}\to T_1:=\theta+\mathrm{dd}^c\varphi_1$$

故 T_1 是一个正闭流，$\varphi_1 \in \mathrm{PSH}_n(X,\theta)$。类似地，$\varphi_2 \in \mathrm{PSH}_n(X,\theta)$。注意到

$$||f-(\varphi_1-\varphi_2)||_{L^1} = \lim_i ||f-(\varphi_1^{(i)}-\varphi_2^{(i)})||_{L^1} = 0$$

于是有 $f \in \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\theta) = \Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$。

∎

注意到 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$ 一般是无穷维的凸体，为了刻画它，我们引入以下直径函数（对 $1 \leqslant p < \infty$）

$$\mathrm{Diam}_p(\alpha) := \sup_{f\in\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)} \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

它是有限数，因为 $\Delta\mathrm{PSH}_n(X,\alpha)$ 是 L^p 空间的紧集。

直径函数有如下性质

命题 6.2： 在上述记号和定义下，我们有

(1) $\mathrm{Diam}_p(\lambda\alpha) = \lambda\mathrm{Diam}_p(\alpha)$

(2) 若 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$，则 $\mathrm{Diam}_p(\alpha_1) \geqslant \mathrm{Diam}_p(\alpha_2)$。

(3) 若 $Z(\alpha)$ 是分式 Zariski 分解的正部，我们有 $\mathrm{Diam}_p(\alpha) = \mathrm{Diam}_p(Z(\alpha))$。

(4) 若 f 是一个全纯自同构，$f^*\mu = \mu'$。则

$$\mathrm{Diam}_p(\alpha,\mu) = \mathrm{Diam}(f^*\alpha,\mu')$$

我们主要对 $\mu' = \mu$ 这种情况感兴趣，此时 f 保持测度 μ。

(5) α 是刚性类当且仅当 $\mathrm{Diam}_p(\alpha) = 0$ 对一个 p。

(6) Diam_p 在拟有效类锥 $\mathcal{E}$ 上是上半连续函数。特别地，Diam_p 沿下降序列连续。

证明 (1) 和 (2) 由定义可得。

对于 (3)，注意到在同调类 α 中的正闭流比 $N(\alpha)$ 大，于是

$$T_1 - T_2 = (T_1 - [N(\alpha)]) - (T_2 - [N(\alpha)])$$

对于在类 α 的正闭流 T_1, T_2。

(4),(5) 由定义可得。

(6) 设 $\alpha_n = \{\theta_n\}$ 是一列收敛到 α 的拟有效类。取 S_n, T_n 为同调类 α_n 中的两个正闭流，它们正规化的势函数为 $\varphi_n, \psi_n \in \mathrm{PSH}_n(X,\theta_n)$，且满足

$$||\varphi_n - \psi_n||_{L^p} \geqslant \mathrm{Diam}_p(\alpha_n) - \frac{1}{n}$$

由于 $\mathrm{Mass}(S_n)$ 和 $\mathrm{Mass}(T_n)$ 一致有界，我们可以取 S_n 和 T_n 的子列使得：

$$S_n \to S, \quad T_n \to T$$

这里 S 和 T 是类 α 里的正闭流。

注意 φ_n，ψ_n 是 $\mathrm{QPSH}(X)$ 空间的预紧集，将原函数列换成它的一个子列，我们可设 φ_n，ψ_n 是收敛列，且收敛到 φ 与 ψ。容易验证 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}_n(X, \theta)$ 是 S 与 T 正规化的势函数，且

$$||\varphi_n - \varphi||_{L^1} \to 0, \quad ||\psi_n - \psi||_{L^1} \to 0$$

利用插值不等式，对于任何 p，我们取 $q > p$ 及 $\alpha \in [0, 1]$ 使得

$$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{q} = \frac{1}{p}$$

于是

$$||\varphi_n - \varphi||_{L^p} \leqslant ||\varphi_n - \varphi||_{L^1}^{\alpha} ||\varphi_n - \varphi||_{L^q}^{1-\alpha}$$

此处 $||\varphi_n - \varphi||_{L^q}$ 一致有界，由于 $\varphi_n, \varphi \in \mathrm{PSH}_n(X, \omega)$ 对足够正的 ω。我们有

$$||\varphi_n - \varphi||_{L^p} \to 0$$

类似地，

$$||\psi_n - \psi||_{L^p} \to 0$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{Diam}_p(\alpha) \geqslant ||\varphi - \psi||_{L^p} = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \psi_n|| \\ \geqslant \limsup_n \mathrm{Diam}_p(\alpha_n) \end{aligned}$$

这就完成了证明。 ∎

在之后的讨论里，我们将直径函数 Diam_p 简记为 d。

对 K3 曲面，注意其上有一不变测度:

命题 6.3: 设 X 为 K3 曲面，$f \in \mathrm{Aut(X)}$。取 $0 \neq \Omega \in H^0(X, \Omega_X^2)$，我们有 $f^*\Omega = \lambda\Omega$，这里 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $|\lambda| = 1$。于是 $\mu = \Omega \wedge \overline{\Omega}$ 是一个 f-不变测度。

证明 由于 $\Omega_X^2 \simeq \mathcal{O}_X$，我们有 $f^*\Omega = \lambda\Omega$。由于 f 是微分同胚，设 $\mathrm{dvol} = \Omega \wedge \overline{\Omega}$，我们有

$$\int_X f^*\mathrm{dvol} = \int_X \mathrm{dvol}$$

此即 $|\lambda| = 1$。 ∎

作为推论，我们有

推论 6.1: 设 X 为 K3 曲面，$\alpha \in \mathcal{E}$。如果 α 在 Aut(X) 作用下的轨道的闭包包含

一个刚性类，则 α 是刚性类。

证明 由条件，我们有一列自同构 $\{\gamma_i\} \subset \mathrm{Aut(X)}$ 使得

$$\gamma_i^* \alpha \to \alpha_0$$

这里 α_0 是一个刚性类。由于测度 $\mu = \Omega \wedge \overline{\Omega}$ 在 Aut(X) 作用下不变，我们有 $d(\alpha) = d(\gamma_i^* \alpha)$。由 d 的上半连续性，我们有

$$0 = d(\alpha_0) \geqslant \limsup_i d(\gamma^* \alpha) = d(\alpha)$$

故 α 是刚性类。 ∎

6.2 复环面上的一些计算

在此节中，我们考察复环面 $X = E \times E$，这里 E 是一个椭圆曲线。注意 X 上有一自然的光滑测度 $\mu = (\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) \wedge (\sqrt{-1}\mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z_2})$。这个测度在 X 的如下 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-作用下不变

$$(z_1, z_2) \mapsto (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)$$

对 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。注意到自同构 A 是双曲的，当且仅当 $\mathrm{tr}(A) > 2$。

X 上任一体积为 0 的非平凡数值有效类可写为如下形式

$$\theta = \sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1 + \beta \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha \mathrm{d}z_1 + \beta \mathrm{d}z_2)}$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 且 $\alpha\beta \neq 0$。乘上一个正数，我们总可设 $\alpha = 1$ 或 $\beta = 1$，于是我们之后主要讨论 $\beta = 1$ 且 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的情形。

命题 6.4： 设 $\theta = \sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2)}$ 为 X 上的同调类。若 $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$，则 θ 是刚性类。如果 $\alpha \in \mathbb{Q}$，则 α 不是刚性类，而且此时 $d(\theta) = \frac{1}{q^2} C$，这里 q 是 α 的既约分式的分母，C 是不依赖于 θ 的常数。

证明 对矩阵

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

我们有 $A^*\theta = \sqrt{-1}(\alpha' \mathrm{d}z_1 + \beta' \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha' \mathrm{d}z_1 + \beta' \mathrm{d}z_2)}$，这里

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

若 $\alpha = 0$，则 θ 是 E 上 Kähler 形式通过第二分量投影 $p_2 : X \to E$ 拉回的类，

它不是刚性类。我们于是可设 $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$，并将 $\alpha = \frac{p}{q}$ 写成两个互素整数的商。取 $(a, c) \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $ap + cq = 1$，此处 a, c 互素。我们取 $(b, d) \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $ad - bc = 1$，于是

$$A^*\theta = \frac{\sqrt{-1}}{q^2}(\mathrm{d}z_1 + \beta'\mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\mathrm{d}z_1 + \beta'\mathrm{d}z_2)} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \beta' \in \mathbb{Z}$$

利用以下自同构拉回上面的形式

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta' & 1 \end{pmatrix}$$

我们得到

$$(A')^* A^* \theta = \frac{\sqrt{-1}}{q^2} \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}$$

于是

$$d(\theta) = d((A')^* A^* \theta) = \frac{1}{q^2} d(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) > 0$$

此式对 $\alpha = 0$ 也对，此时我们设 $0 = 0/1$。

若 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，我们声称轨道 $O_\alpha = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \cdot (\alpha, 1)^T$ 在 $\mathbb{R}^2$ 里稠密，这里 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 自然地作用在 $\mathbb{R}^2$ 上。在这个声称下，我们可以取一列举证 $A_i \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 使得 $A_i^*\theta$ 收敛到 0。于是

$$d(\theta) = \limsup_i d(A_i^*\theta) \leqslant d(\theta_0) = 0$$

故 $d(\theta) = 0$ 且 θ 是刚性类。

我们在此处证明上述声称：由于 α 是无理数，由 Dirichlet 逼近定理，对任意 $\epsilon > 0$，我们可以取两互素的整数 a, b 使得 $|a\alpha + b| < \epsilon$。考虑如下作用：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b \\ k(a\alpha + b) + (c\alpha + d) \end{pmatrix} \in O_\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

由于 $|a\alpha + b| < \epsilon$，$k(a\alpha + b) + (c\alpha + d)$ 构成了一个 R 上的 ϵ-网。由于 ϵ 任取，$\{0\} \times \mathbb{R} \in \overline{O_\alpha}$。由于 $\overline{O_\alpha}$ 在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 作用下不变，我们有

$$\begin{pmatrix} bx \\ dx \end{pmatrix} \in \overline{O_\alpha} \quad x \in \mathbb{R}$$

此处 b, d 是互素整数。于是 $\mathbb{Q}^2 \subset \overline{O_\alpha}$，进而 $\overline{O_\alpha} = \mathbb{R}^2$。 ∎

当 E 是一条有复乘的曲线，我们可以做的更多。

我们先回忆一些基本知识，设 D 是一个没有平方因子的正整数，我们考虑虚二次域 $\mathbb{Q}[\sqrt{-D}]$ 及它的整数环 $\mathcal{O}_D$。由代数数论的标准结果，我们有

(1) 如果 $D \equiv 1, 2 \bmod 4$，则

$$\mathcal{O}_D = \mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$$

如果 $D \equiv 3 \bmod 4$，则

$$\mathcal{O}_D = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{-D})]$$

我们记 $\omega := \sqrt{-D}$ 或 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-D})$，分别对应以上两种情况。

(2) $\mathbb{Q}[\sqrt{-D}]$ 的类数是 1 当且仅当 $\mathcal{O}_D$ 是 PID (或 UFD) 环当且仅当 $D = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$。(Baker-Heegner-Stark 定理)

在下面的讨论中，我们假设 $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_D$，这是一种特殊的带有复乘的椭圆曲线，一个例子是 $\mathbb{C}/\mathcal{O}_D$。此时 $SL(2, \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_D))$ 将自然地作用在 $X = E \times E$ 上，其子群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 的作用和前文讨论的作用一样。注意此作用仍保持自然测度 $\mu = (\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) \wedge (\sqrt{-1}\mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z_2})$。

受前文的启发，丢潘图逼近会在我们的证明中起到重要作用，我们回忆以下结果：

(1) (Dirichlet 逼近定理) 对 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，存在无穷多组互素的整数对 (p, q) 使得

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

(2) (Sullivan 的逼近定理，见 Theorem 5 于[20]) 固定一个虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 及其整数环 $\mathcal{O}_D$。对函数 $a : \mathbb{R} \to (0, 1]$。则对几乎处处复数 $z \in \mathbb{C}$ 存在无穷多对 $(p, q) \in \mathcal{O}_D \times \mathcal{O}_D$ 使得

$$|z - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{a(|q|)}{|q|^2} \quad (p, q) = \mathcal{O}_D$$

当且仅当

$$\int_1^\infty \frac{a(x)^2}{x}\mathrm{d}x = \infty$$

特别地，$a(x) \equiv 1$ 满足上面的积分条件。

(3) (Baier and Technau 2021,[21]) 设 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 是一个类数为 1 的虚二次域。取 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$，则对任一 $\epsilon > 0$，存在无穷多对 $(p, q) \in \mathcal{O}_D \times \mathcal{O}_D$ 使得

$$|z - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{|q|^{1+\frac{1}{4}-\epsilon}} \quad (p, q) = \mathcal{O}_D$$

我们定义一种更广的逼近条件

定义 6.1： 设 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 为一个虚二次域，其整数环为 $\mathcal{O}_D$。我们称 $z \in \mathbb{C}$ 是好的（相对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$）如果存在序列 $(p_n, q_n) \in \mathcal{O}_D \times \mathcal{O}_D$ 使得

$$|q_n z - p_n| \to 0 \quad (p_n, q_n) = \mathcal{O}_D$$

注释 6.1： 根据 Dirichlet 逼近定理，所有无理数相对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 是好的。

根据 Sullivan 的工作[20]，$\mathbb{C}$ 中几乎处处点相对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 是好的。

根据 Baier 和 Technau 的工作[21]，当 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 类数为 1 时。$\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的点相对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 是好的。

利用以上定义，我们给出

命题 6.5： 设 E 是一椭圆曲线，满足 $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_D$，$X = E \times E$。如果 $\alpha \in \mathbb{C}$ 相对于 $\mathcal{O}_D$ 是好的，那么 $\theta = \sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha \mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2)}$ 是 X 上的刚性类。

证明 我们声称轨道 $O_\alpha = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_D) \cdot (\alpha, 1)^T$ 的闭包包含 $\mathbb{C} \cdot \mathbb{R}^2$，这里 $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_D)$ 自然地作用在 $\mathbb{C}^2$ 上。在此声称下，我们可以取一列矩阵 $A_i \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 使得 $A_i^* \theta$ 趋于 0。于是

$$d(\theta) = \limsup_i d(A_i^* \theta) \leqslant d(0) = 0$$

于是命题得证。

我们此处证明上面的声称，对于任意 $\epsilon > 0$，我们取一列 $(p_n, q_n) \in \mathcal{O}_D \times \mathcal{O}_D$ 使得

$$|q_n \alpha - p_n| < \epsilon \quad (p_n, q_n) = \mathcal{O}_D$$

考虑如下作用

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n & -p_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n \alpha - p_n \\ k(q_n \alpha - p_n) + (c_n \alpha + d_n) \end{pmatrix} \in O_\alpha \quad k \in \mathcal{O}_D$$

此处 $(c_n, d_n) \in \mathcal{O}_D \times \mathcal{O}_D$ 使得 $q_n d_n + c_n p_n = 1$。

由于 $|q_n \alpha - p_n| < \epsilon$，$k(q_n \alpha - p_n) + (c_n \alpha + d_n)$ 组成一个 $\mathbb{C}$ 上的 $10D\epsilon$-网，故 $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \overline{O_\alpha}$。

由于 $\overline{O_\alpha}$ 在 $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_D)$ 作用下不变，我们有

$$\begin{pmatrix} bx \\ dx \end{pmatrix} \in \overline{O_\alpha} \quad x \in \mathbb{C}$$

这里 b, d 为互素整数，于是 $\mathbb{C} \cdot \mathbb{Q}^2 \subset \overline{O_\alpha}$，进而 $\mathbb{C} \cdot \mathbb{R}^2 \subset \overline{O_\alpha}$。 ∎

若 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的类数为 1，$\mathcal{O}_D$ 是 PID，我们可以对直径函数有更具体的计算：

命题 6.6：设 E 是一椭圆曲线，满足 $\mathrm{End}(E)=\mathcal{O}_D$，$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的类数为 1，$X=E\times E$。对同调类 $\theta=\sqrt{-1}(\alpha\mathrm{d}z_1+\mathrm{d}z_2)\wedge\overline{(\alpha\mathrm{d}z_1+\mathrm{d}z_2)}$（$\alpha\in\mathbb{C}$），我们有

$$\mathrm{diam}(\theta)=\begin{cases}0 & a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-D})\\ \frac{1}{|q|^2}d_0 & a=\frac{p}{q}\text{是}\mathbb{Q}(\sqrt{-D})\text{中的既约分式}\end{cases}$$

这里 $d_0=\mathrm{diam}(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_1\wedge\mathrm{d}\overline{z_1})$。

证明 如果 $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$，则 α 相对于 $\mathcal{O}_D$ 是好的，于是 θ 是刚性的。

如果 $\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 且 $\alpha=\frac{p}{q}$ 是它在 $\mathcal{O}_D$ 中的既约分式，注意此处既约分式的存在性由 $\mathcal{O}_D$ 是 PID 保证。取 $c,d\in\mathcal{O}_D$ 使得 $cq-dp=1$，我们有

$$\begin{pmatrix}q & -p\\ -d & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad A:=\begin{pmatrix}q & -p\\ -d & c\end{pmatrix}$$

于是 $(A^T)^*\theta=|q|^{-2}(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_2\wedge\mathrm{d}\overline{z_2})$，故 $d(\theta)=|q|^{-2}d(\sqrt{-1}\mathrm{d}z_2\wedge\mathrm{d}\overline{z_2})$。 ∎

6.3 一般二维复环面上的刚性类

最后我们利用叶状结构的观点，讨论一般二维复环面 $X=\mathbb{C}^2/\Lambda$ 上的刚性类。我们考虑 X 上的如下微分形式

$$0\neq\theta=\sqrt{-1}(\alpha\mathrm{d}z_1+\beta\mathrm{d}z_2)\wedge\overline{(\alpha\mathrm{d}z_1+\beta\mathrm{d}z_2)}$$

则 θ 自然地在 X 上诱导出余维数为 1 的叶状结构

$$\mathcal{F}_\theta=\ker(\theta)=\ker(\alpha\mathrm{d}z_1+\beta\mathrm{d}z_2)$$

记 $L=\mathrm{Im}(i:\mathbb{C}\to X)$ 为 $\mathcal{F}_\theta$ 的过 0 点的叶子，$\overline{L}$ 是 L 的欧式拓扑闭包。用此记号，我们有

命题 6.7： 设 $\tilde{\theta}$ 是同调类 $\{\theta\}$ 中的一个光滑闭半正形式，则 $\tilde{\theta}$ 为如下形式：

$$\tilde{\theta}=f\theta$$

此处 f 是 X 上的一个光滑函数，是实环面 $X/\overline{L}$ 上光滑函数 g 沿如下映射的拉回

$$p:X\to X/\overline{L}$$

此处 g 满足如下积分条件

$$\int_X f\,\mathrm{dvol}=C(L)\int_{X/\overline{L}}g\,\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{vol}}=\mathrm{vol}(X)$$

证明 在局部计算，如果 $\tilde{\theta}$ 不和 θ 平行，那么 $\tilde{\theta} \wedge \theta > 0$，这和 $\{\theta\}^2 = \int_X \tilde{\theta} \wedge \theta = 0$ 矛盾。

$\tilde{\theta}$ 的闭性蕴含

$$\mathrm{d}f \wedge \theta = 0$$

由于 $\overline{L}$ 连通，通过局部计算，f 在 $\overline{L}$ 上为常数。且此结论对任何叶子都成立。于是 f 是 $X/\overline{L}$ 上光滑函数 g 的拉回。

通过庞加莱对偶，$\{\theta\} = \{\tilde{\theta}\}$ 当且仅当以下的积分等式成立

$$\int_X f \mathrm{dvol} = C(L) \int_{X/\overline{L}} g \mathrm{d}\widetilde{\mathrm{vol}} = \mathrm{vol}(X)$$

此处 $C(L)$ 是一个只依赖于 L 的常数，$\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{vol}}$ 是实环面 $X/\overline{L}$ 上的典范测度。 ∎

注释 6.2: 通过合适的选取 θ 及环面 X，实环面 $X/\overline{L}$ 的所有可能（实）维数为 0，1，2。

当 L 在 X 中稠密，即 $\overline{L} = X$，$X/\overline{L} = 0$，我们证明上述同调类 $\{\theta\}$ 是刚性的。结合以上结果，我们得到如下等价条件。

命题 6.8: 设 $0 \neq \theta = \sqrt{-1}(\alpha \mathrm{d}z_1 + \beta \mathrm{d}z_2) \wedge \overline{(\alpha \mathrm{d}z_1 + \beta \mathrm{d}z_2)}$ 是环面 $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ 上的微分形式，则 $\{\theta\}$ 是刚性类当且仅当 $\mathcal{F}_\theta$ 的叶子 L 在 X 里稠密。

证明 由命题 3.2，我们只需考虑具有极小奇点的 θ-多重次调和函数，此时这些拟多重次调和函数是有界函数。

设 $T \in \{\theta\}$ 是局部势有界的正闭流，由于 $T \wedge \theta$ 是一个质量为 $\{\theta\}^2 = 0$ 的正测度，我们有 $T \wedge \theta = 0$。记 $T = \theta + \mathrm{dd}^c\varphi$，并记 $i : \mathbb{C} \to X$ 为任一叶子，我们有

$$\mathrm{dd}^c(\varphi \circ i) = 0$$

于是 $\varphi \circ i$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界调和函数，这只能是常数，于是 φ 在任何叶子上都是常数。取一片叶子 L 使得 $\varphi|_L = \sup_X \varphi$。由于 L 在 X 中稠密，对任一点 $x \in X$，我们有

$$\varphi(x) \geqslant \limsup_{L \ni y \to x} \varphi(y) = \sup_X \varphi$$

于是 φ 是常数，$T = \theta$。 ∎

第 7 章　结论

本文得到的结果已在第一章详细介绍，我们在此处提出可进一步考虑的问题:

(1) 在第三章中我们考察了曲面上的第二类的刚性拟有效类，它有一定的正则性，比如 Lelong 数全为 0。我们能否做的更好?

(2) 在第四章我们知道 Ueda 类为 (α) 的光滑嵌入曲线是刚性的，(β) 类的不是刚性的。那么我们能否对 (γ) 类的情形得到刚性结果?

参考文献

[1] Demailly J P, Peternell T, Schneider M. Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds[J/OL]. International Journal of Mathematics, 2001, 12(06): 689-741. https://doi.org/10.1142/s0129167x01000861.

[2] Demailly J P, Peternell T, Schneider M. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles[J]. Journal of Algebraic Geometry, 1994, 3(2): 295-346.

[3] Wu D, Yau S, Zheng F. A Degenerate Monge–Ampère equation and the Boundary Classes of Kähler cones[J/OL]. Mathematical Research Letters, 2009, 16(2): 365-374. https://doi.org/10.4310/mrl.2009.v16.n2.a12.

[4] Cao J, Höring A. Direct images of pseudoeffective cotangent bundles[M/OL]. arXiv, 2023. https://arxiv.org/abs/2302.12658v1.

[5] Filip S, Tosatti V. Canonical currents and heights for K3 surfaces[M/OL]. arXiv, 2021. https://arxiv.org/abs/2103.02095. DOI: 10.48550/ARXIV.2103.02095.

[6] Sibony N, Soldatenkov A, Verbitsky M. Rigid currents on compact hyperkahler manifolds [M/OL]. arXiv, 2023. https://arxiv.org/abs/2303.11362v1.

[7] Boucksom S. Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds[J/OL]. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2004, 37(1): 45-76. https://doi.org/10.1016/j.ansens.2003.04.002.

[8] Demailly J P. Complex analytic and differential geometry[EB/OL]. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[9] Guedj V, Zeriahi A. Degenerate complex monge–ampère equations[M/OL]. EMS Press, 2017. https://doi.org/10.4171/167.

[10] Damailly J P. Singular hermitian metrics on positive line bundles[M/OL]//Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1992: 87-104. https://doi.org/10.1007/bfb0094512.

[11] Boucksom S, Eyssidieux P, Guedj V, et al. Monge–ampère equations in big cohomology classes [J/OL]. Acta Mathematica, 2010, 205(2): 199-262. https://doi.org/10.1007/s11511-010-0054-7.

[12] Demailly J P. Regularization of closed positive currents and intersection theory[J]. Journal of Algebraic Geometry, 1992, 1(3): 361-409.

[13] Barth W, Peters C, Ven A. Compact complex surfaces, 1st Editon[M/OL]. Springer Berlin Heidelberg, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96754-2.

[14] Ueda T. On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle[J/OL]. Kyoto Journal of Mathematics, 1982, 22(4). https://doi.org/10.1215/kjm/1250521670.

[15] Neeman A. Ueda theory: theorems and problems[J/OL]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1989, 81(415): 0-0. https://doi.org/10.1090/memo/0415.

[16] Koike T. On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles[J/OL]. Kyoto Journal of Mathematics, 2015, 55(3). https://doi.org/10.1215/21562261-3089091.

[17] Koike T. Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one[M/OL]. arXiv, 2021. https://arxiv.org/abs/2110.04864. DOI: 10.48550/ARXIV.2110.04864.

[18] Grivaux J. Parabolic automorphisms of projective surfaces (after m. h. gizatullin)[J/OL]. Moscow Mathematical Journal, 2016, 16(2): 275-298. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2016-16-2-275-298.

[19] Dinh T C, Sibony N. Rigidity of Julia sets for Hénon type maps[J/OL]. Journal of Modern Dynamics, 2015, 8(3/4): 499-548. https://doi.org/10.3934/jmd.2014.8.499.

[20] Sullivan D. Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers, and the logarithm law for geodesics[J/OL]. Acta Mathematica, 1982, 149(0): 215-237. https://doi.org/10.1007/bf02392354.

[21] Baier S, Technau M. On the distribution of αp modulo one in imaginary quadratic number fields with class number one[J/OL]. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 2021, 32(3): 719-760. https://doi.org/10.5802/jtnb.1141.

致　　谢

感谢导师肖建教授的指导，以及对本文初始版本的阅读，建议，以及相关的讨论。感谢 Takayuki Koike 教授回答了我对其文章的一些疑问。作者亦感谢 Fillip-Tosatti 的系列工作给本文的启发。

声　　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：曹君宇　日　期：2023年6月6日

附录 A　外文资料的调研阅读报告

Examples of rigid currents on compact Kähler surfaces

Contents

I will collect some existent results on rigid currents this part.

A.1　The notion of rigidity for currents

Definition A.1:　Let X be a compact complex manifold of dimension n. A positive closed current T on X of bidegree $(1,1)$ is said to be rigid if there is no positive closed current $T' \in \{T\} \in H^{1,1}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{R})$ except T itself. A cohomology $\alpha \in H^{1,1}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{R})$ is said to be rigid if it contains a rigid $(1,1)$-current.

Remark A.1:　When X is a compact Kähler manifold, the Bott-Chern cohomology group coincides with the Dolbeault cohomology group. And our following examples are mostly on Kähler manifolds.

We discuss some general properties of rigid currents

Proposition A.1: Let $\mathcal{C} \subset H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R})$ be the cone of pseudo-effective classes and $\mathcal{R}$ be the set of rigid classes. Then

(1) $a, b \in \mathcal{C}$ and $a + b \in \mathcal{R}$ imply $a, b \in \mathcal{R}$

(2) $0 \in \mathcal{R}$

(3) $a \in \mathcal{R}$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ imply $\lambda a \in \mathcal{R}$

(4) $\mathcal{R} \subset \mathrm{bd}(\mathcal{C})$, or $\mathcal{C} = \mathcal{R}$.

Proof The first three assertions are easy. For the last one, suppose $a \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}^{\circ}$. Then for each class $\theta \in \mathcal{C}$, we can take $0 < \epsilon << 1$ such that $a - \epsilon\theta \in \mathcal{C}$. Since $\mathcal{R} \ni a = (a - \epsilon\theta) + \epsilon\theta$, we have $\theta \in \mathcal{R}$. Thus $\mathcal{R} = \mathcal{C}$. ∎

Remark A.2: If X is a compact Kähler manifold, then $\mathcal{R} \subset \mathrm{bd}(\mathcal{C})$. It is because the Kähler class $\{\omega\}$ can't be rigid.

We can also characterize rigid class in terms of PSH functions:

Proposition A.2: Let θ be a smooth closed real $(1,1)$-form, we have the following equivalent statements:

(1) $\mathrm{PSH}_{\min}(X, \theta) = \varphi + \mathbb{R}$ for some function $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$.

(2) $\mathrm{PSH}(X, \theta) = \varphi + \mathbb{R}$

(3) $\{\theta\}$ is a rigid class.

Proof It suffices to prove that (1) implies (2):

For any function $\psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$, we can assume $\varphi < \psi - 1$ at a point by translation. And we have

$$\max\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{PSH}_{\min}(X, \theta)$$

So $\max\{\varphi, \psi\} = \varphi + C$ for some $C \in \mathbb{R}$. As $\max\{\varphi, \psi\} \geqslant \varphi$, we have $C \geqslant 0$. If $C > 0$, we shall have $\psi = \varphi + C$. If $C = 0$, we have $\varphi \geqslant \psi$, which contradicts with our assumption. ∎

A.2 Divisorial Zariski decomposition on surfaces

Boucksom introduced his divisorial Zariski decomposition in[1]. And we introduce some results in the following.

Definition A.2: Let X be a compact complex manifolds. Let ω be a reference Hermitian form on X. Let α be a class in $H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$. Then

(1) The class α is said to be a modified Kähler class if and only if it contains a Kähler current T with $\nu(T, D) = 0$ for all prime divisors D on X.
(2) The class α is said to be a modified nef class if and only if, for every $\epsilon > 0$, there exists a closed $(1,1)$-current T_ϵ with $T_\epsilon \geqslant -\epsilon\omega$ and $\nu(T_\epsilon, D) = 0$ for all prime divisors D on X.

Remark A.3: When X is a compact surface, the set of modified Kähler classes (resp. modified nef classes) coincides with the set of Kähler classes (resp. nef classes). (Refer to Section 4.2.1 of[1])

We define the minimal multiplicity of a pseudo-effective class

Definition A.3: The minimal multiplicity at $x \in X$ of the pseudo- effective class $\alpha \in H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ is defined as

$$\nu(\alpha, x) = \sup_{\epsilon>0} \inf_{\substack{T \geqslant -\epsilon\omega, \\ T\in\alpha}} \nu(T, x) = \sup_{\epsilon>0} \nu(T_{\min,\epsilon}, x)$$

Then $\nu(\alpha, x)$ is upper-semi-continuous on x. And we define the generic minimal multiplicity of α along a prime divisor D:

$$\nu(\alpha, D) := \inf_{x\in D} \nu(\alpha, x)$$

One can see that $\nu(\alpha, D) = \sup_{\epsilon>0} \nu(T_{\min,\epsilon}, D)$, and $\nu(\alpha, D) = \nu(\alpha, x)$ for generic $x \in D$.

Definition A.4: The negative part of a pseudo-effective class $\alpha \in H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ is defined as $N(\alpha) := \sum_D \nu(\alpha, D)D$. The Zariski projection of α is $Z(\alpha) := \alpha - \{N(\alpha)\}$. We call the decomposition $\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$ the divisorial Zariski decomposition of α.

We have the following properties of Zariski projection $Z(\alpha)$:

Theorem A.1: Let $\alpha \in H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ be a pseudo-effective class.
(1) The Zariski projection $Z(\alpha)$ is a modified nef class.
(2) We have $Z(\alpha) = \alpha$ if and only if α is modified nef.
(3) The volume of $Z(\alpha)$ is equal to the volume of α. Especially, the class $Z(\alpha)$ is big if and only if α is.

We then discuss the negative part occurs in the divisorial Zariski decomposition (Definition A.4).

Definition A.5: (1) A family $D_1, \cdots, D_q$ of prime divisors is said to be an exceptional family if and only if the convex cone generated by the cohomology classes of the D_i meets the modified nef cone at 0 only.

(2) An effective $\mathbb{R}$-divisor E is said to be exceptional if and only if its prime components constitute an exceptional family.

We have the following properties of exceptional divisors

Theorem A.2: (1) An effective $\mathbb{R}$-divisor E is exceptional if and only if $Z(\{E\}) = 0$.

(2) If E is an exceptional effective $\mathbb{R}$-divisor, we have $E = N(\{E\})$.

(3) If $D_1, \cdots, D_q$ is an exceptional family of prime divisors, then the classes $\{D_1\}, \cdots, \{D_q\}$ are linearly independent in $NS_{\mathbb{R}}(X) \subset H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$. Especially, the length of the exceptional families of prime divisors are bounded by the Picard number $\rho(X)$.

(4) Let X be a surface. A family $D_1, \cdots, D_q$ of prime divisors is exceptional if and only if its intersection matrix $(D_i \cdot D_j)$ is negative definite.

Remark A.4: (1) Using the first two items in Theorem.A.2, we conclude that: An effective $\mathbb{R}$-divisor E is exceptional iff $Z(\{E\}) = 0$ iff $N(\{E\}) = E$.

(2) Contraction criterion, we need assume that $C = \cup_i D_i$ is a connected subset, and use Grauert's contraction criterion.

On surface, the divisorial Zariski decomposition is compatible with the intersection bi-linear form:

Theorem A.3: Let X be a compact surface. If $\alpha \in H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X, \mathbb{R})$ is a pseudo-effective class, its divisorial Zariski decomposition $\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$ is the unique orthogonal decomposition of α with respect to the non-degenerate quadratic form $q(\alpha) := \int \alpha^2$ into the sum of a nef class and the class of an exceptional effective $\mathbb{R}$-divisor.

Remark A.5: Let X be a projective surface; if α is the class of an effective $\mathbb{Q}$-divisor D, then the divisorial Zariski decomposition of α is just the Zariski decomposition of D.

In the last, we show the rigidity of exceptional effective $\mathbb{R}$-divisors:

Theorem A.4: If E is an exceptional effective $\mathbb{R}$-divisor on compact complex manifold X. If $T \in \{E\}$ is a positive current, then $T = [E]$.

Proof We have $T \geqslant \sum_D \nu(T, D)[D]$. On the other hand, $\nu(\{E\}, D) \leqslant \nu(T, D)$ by the definition of minimal multiplicity. Then we have $T \geqslant [N(\{E\})]$. Since E is an exceptional effective $\mathbb{R}$-divisor, we have $N(\{E\}) = E$. Thus $T \geqslant [E]$ and $T - [E]$ is a positive closed current in the class 0. Since the only positive current with zero $\partial\bar{\partial}$-cohomology is 0, we have $T = [E]$. ∎

A.3 Ueda theory on surfaces

In this section, I would collect some results on Ueda theory. The main references are[2] and[3].

In this section, we assume that X is a compact complex surface.

Let C be an embedded smooth complex curve with $(C^2) = 0$. Then the holomorphic normal bundle $N_{C/X}$ is of degree zero on C. So $N_{C/X}$ is a topologically trivial line bundle over C and admits a flat structure: We can find an open covering $\{U_j\}_j$ of C and a family of transition functions

$$t_{jk} : U_{jk} = U_j \cap U_k \to U(1)$$

such that $N_{C/X} = \{U_j \cap U_k, t_{jk}\}_{jk} \in H^1(C, \mathcal{O}_C^*)$.

For each C, we can find a tubular neighborhood V such that $V = \cup V_j$ is an open covering and $V_j \cap C = U_j$. And V_j has holomorphic coordinates (z_j, x_j) such that $U_j = \{z_j = 0\} \cap V_j$. Take suitable coordinates such that $z_k/z_j = t_{jk} \in U(1)$ on $U_j \cap U_k$. We say $\{(V_j, z_j, x_j)\}$ is a system of type n if $\mathrm{mult}_{U_j \cap U_k}(t_{jk}z_j - z_k) \geqslant n + 1$, that is

$$t_{jk}z_j - z_k = f_{jk}(x_k)z_k^{n+1} + \text{(higher order terms)}$$

where f_{jk} is a holomorphic function. By definition, any system of type m is also of type n given that $m \geqslant n$.

Then due to Ueda[2] p.588, we have

Definition A.6: Suppose there exists a system of type n. Then $\{U_j \cap U_k, f_{jk}\}_{j,k}$ satisfies the cocycle conditions. And

$$u_n(C, X) := \{U_j \cap U_k, f_{jk}\}_{j,k} \in H^1(C, N_{C/X}^{-n})$$

is called the n-th Ueda class of the pair (C, X).

Remark A.6: The Ueda class measures the obstruction from extending the unitary flat structure of $N_{C/X}$ on C to a neighborhood of C. If there is a neighborhood V of C such that $[C]|_V$ is unitary flat, then $u_m = 0$ for all m.

It can be proved that the definition of Ueda class does not rely on the choice of coordinate systems. And $u_n(C, X) = 0$ iff there exists a system of type $n+1$. So we have a dichotomy:

(1) There exists n such that $u_m = 0$ for $m < n$ and $u_n \neq 0$. And then we set $\mathrm{type}(C, X) := n$.

(2) $u_m = 0$ for all m. We say $\mathrm{type}(C, X) = \infty$ in this case.

More precisely, Ueda classify the pair (C, X) into the following four classes in[2]:

(1) (α): The case when $u_m \neq 0$ for some $m > 0$.

(2) (β): The case where there is a open neighborhood V of C such that $[C]|_V$ is unitary flat. In this case, if $N_{C/X}$ is a torsion of order m, then we can take a proper holomorphic map $f : V \to \mathbb{D}$ such that $m[Y] = f^{-1}(\{0\})$ by shrinking V. And we call this (β'). If $N_{C/X}$ is not a torsion, we call it (β'').

(3) (γ): The remaining case.

Some properties of pairs of type (α) are deduced by Ueda in[2]. Thanks to the works of Koike, we have a good understanding of pair (C, X) of type (β). But the property of type (γ) pairs remains unclear. We will survey these results in the following.

A.3.A Rigidity result for type (α)

When $\mathrm{type}(C, X) < \infty$, we have the following rigidity result:

Theorem A.5: ([2], Theorem 2) Let V be a neighborhood of C in X, and let Ψ be a psh function on $V \backslash C$. Assume that $\mathrm{type}(C, X) = n$ holds and there exists a positive real number $a < n$ such that $\Psi(p) = o(\mathrm{dist}(p, C)^{-a})$ as p approaches C, where $\mathrm{dist}(p, C)$ is the Euclidean distance between p and C. Then there exists a neighborhood V_0 of C such that Ψ is constant on $V_0 \backslash C$.

As a consequence, we have

Corollary A.1: Let X be a compact Kähler surface, and D an smooth divisor with $(D^2) = 0$ and $\mathrm{type}(D, X) < \infty$. Then $[D]$ is a rigid nef current.

Proof Let T be a positive current with minimal singularity in the class $\{D\}$ with local potential φ. Let f_D be the local defining function. Then $\Psi = \varphi - \log|f_D|^2$ is globally defined on $X \backslash D$. Since $\log|f_D|^2$ is harmonic outside D, we have Ψ is psh on $X \backslash D$. Since φ is less singular than $\log|f_D|^2$, we have

$$\Psi(p) \leqslant -2\log|f_D|^2 \sim -2\log|z|^2 = o(\frac{1}{|z|^{0.1}}) \quad \text{as } p \to D$$

Using Theorem.A.5, we have Ψ is a constant on $V\backslash D$ for a neighborhood V of D. So $T|_{V\backslash D} = (\mathrm{dd}^c\varphi|_{V\backslash D}) = 0$. Thus $T|_V = \nu(\varphi, D)[D] = [D]$ as $\nu(\varphi, x) = 1$ for all $x \in D$. So $T \geqslant [D]$ and $T - [D]$ is a positive closed current. Since $T - [D]$ is cohomologous to 0, we have $T - [D] = 0$ and $T = [D]$. So $[D]$ is rigid. ∎

Koike gives an example of divisor whose neighborhood is of (α)-type, and it extends our classic Serre's example.

Example A.1: Let C be a smooth projective curve whose genus is $\geqslant 1$. And let $L \in \mathrm{Pic}_0(C)$ be a line bundle with $\mathrm{H}^1(C, L) \neq 0$. Condiser a vector bundle E on C satisfying the following exact sequence:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(C) \longrightarrow 0$$

which corresponds to the extension class $e \in \mathrm{Ext}(\mathcal{O}(C), L) = \mathrm{H}^1(C, L)$. Let $D := \mathbb{P}(\mathcal{O}(C))$ be the divisor on $X = \mathbb{P}(E)$. Consider the following morphisms:

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(C)) = D \xrightarrow{i} X = \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} C$$

Here $\pi \circ i$ is an isomorphism, and$N_{D/X} = (\pi \circ i)^* L^{-1}$. By Proposition 7.6 in[3], we have

$$\mathrm{H}^1(D, N_{D/X}^{-1}) \ni u_1(D, X) = (\pi \circ i)^* e$$

Thus $u_1(D, X) \neq 0$ iff $e \neq 0$. So D is a rigid divisor iff $e \neq 0$ iff $E \neq L \oplus \mathcal{O}(C)$.

A.3.B Non-rigidity result for type (β)

When (C, X) is of type (β), then $[C]$ can't be rigid due to a theorem by Koike in[4]:

Theorem A.6: Let X be a compact Kähler surface and C an embedded smooth curve with $(C^2) = 0$. Then the class $\{C\}$ is semi-positive iff (C, X) is of the class (β) in Ueda's classification, i.e. there is an open neighborhood V of C such that $[C]$ is unitary flat on it.

A.3.C Examples of type (γ)

We follow Koike's papers[5] and[6] to construct some examples of type (γ).

For an elliptic curve Y, and fix γ_1 and γ_2 to be generators of $\pi_1(Y, p)$. We construct a complex surface X and a non-singular foliation $\mathcal{F}$ on a neighborhood V of Y which satisfy the following two conditions :

(1) There is a holomorphic submersion $\pi : V \to Y$ such that $\pi|_Y$ is identity.

(2) The holonomy representation $h_{\mathcal{F}}$ is : $h_{\mathcal{F}}(\gamma_1) = 1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, $h_{\mathcal{F}}(\gamma_2) = g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$.

Remark A.7: For any $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, a example above exists. One can also show such example is unique in the sense of neighborhoods of Y.

Then the neighborhood property of the example is completely determined by the the dynamical properties of g.

Proposition A.3: (Theorem 1.2 of[6]) Under the notations above, we have

(1) The pair (Y, X) is of type (α) iff g has a rationally indifferent fixed point 0 and is not of finite order, i.e. $g^n \neq \mathrm{id}$ for any $n > 0$.

(2) The pair (Y, X) is of type (β) iff g is linearizable at 0.

(3) The pair (Y, X) is of type (γ) iff g has an irrationally indifferent fixed point0 and is non-linearizable at 0.

By a careful investigation of psh functions around Y with given growth order (similar to Theorem.A.5), Koike deduce that

Theorem A.7: When (Y, X) is of type (γ), then on a neighborhood W, the canonical weight $\log|f_Y|^2$ is of minimal singularity among all those weights φ, which satisfies that $|f_Y|^2 e^{-\varphi}$ is a continuous function.

Remark A.8: I emailed to Professor Koike about the weird "continuity of $|f_Y|^2 e^{-\varphi}$" condition in above theorem. He taught me that the condition is just for technical reason, and he expected this condion can be removed, and thus $\log|f_Y|^2$ is a weight of minimal singularity.

In the last, we explain the terminology of $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ used in Proposition.A.3.

For any element $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, we can write it as

$$g(z) = \lambda z + O(z^2)$$

Here $\lambda = g'(0)$.

We say g is linearizable at 0 if there exist two neighborhoods U, V of 0, and a biholomorphic map $h : U \to V$ such that

$$(h \circ f \circ h^{-1})(z) = \lambda z$$

When $|\lambda| = 1$, then 0 is said to be a rationally (resp. irrationally) indifferent fixed point if λ is (resp. is not) a torsion.

A.4 Rigidity after Fillip-Tosatti, Verbitsky-Sibony

In this section, we collect some results of rigid classes obtained in the work of Fillip-Tosatti[7], and of Sibony-Soldatenkov-Verbitsky[8].

In Fillip-Tosatti's work[7], they assume X is a K3 surface which is algebraic, of Picard rank $\rho \geqslant 3$, and containes no (-2)-curves. In their work, they considered classes in the Néron–Severi group $\mathrm{NS}(X)$. Let $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{NS}(X)$ be the ample cone, and $\partial\mathrm{Amp}(X)$ be its boundary in $\mathrm{NS}(X)$. They obtained that

Theorem A.8 (Theorem 4.3.1 of[7]): Let X be a K3 surface satisfying the conditions above, if $\alpha \in \partial\mathrm{Amp}(X)$ is an irrational class, then α is a rigid class.

Remark A.9: If α is an integral class. Suppose $\alpha = c_1(L)$ for some line bundle on X, and L is nef and $(L^2) = 0$. Using base-point free theorem for K2 surfaces, we conclude L is semi-ample and is not rigid.

In Sibony-Soldatenkov-Verbitsky's work[8], they proved a similar result for hyper-Kähler manifolds:

Theorem A.9 (Theorem 2.1 of[8]): Assume X is a compact hyper-Kähler manifold with $b_2(X) \geqslant 7$, let q be its Beauville-Bogomolov-Fujiki form. If α is a nef class with $q(\alpha) = 0$, then α is rigid in the following cases:

(1) if α is strongly irrational, i.e. $u^{\perp} \cap \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}) = 0$.

(2) if $u^{\perp} \cap \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}) = 0$ is spanned by a vector $v \in \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$.

A.5 Laminations by Riemann surfaces on complex surfaces

We introduce some basic properties of holomorphic laminations or foliation on complex surfaces in this section. The main references for this appendix are Fornæss and Sibony's survey paper[9] and Sullivan's classic paper.

A.5.A General definitions

Definition A.7: Let Y be a Hausdorff topological space. Then $(Y, \mathcal{L})$ is a **lamination** by complex manifolds of dimension q if $\mathcal{L}$ is an atlas with charts

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{D}^q \times K_i$$

Here $\mathbb{D}^q$ is the polydisk in $\mathbb{C}^q$, K_i is a topological space and φ_i is a homeomorphism.

And the transition maps $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ is of the form

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} : \mathbb{D}^q \times K_j &\to \mathbb{D}^q \times K_i \\ (z,t) &\mapsto (f_{ij}(z,t), \gamma_{ij}(t)) \end{aligned}$$

And $f_{ij}(z,t)$ is holomorphic in z.

In many cases, there will be singularities for such laminations, and we introduce the definition of singular laminations:

Definition A.8 (Singular case): Let Y be a laminated topological space, i.e. there is a lamination structure on Y as in A.7. And Y is locally closed in a compact complex manifold M. Let $X := \overline{Y}$ and $E = X \backslash Y$. Therefore E is closed and we consider it as the singularity set. And $Y = X \backslash E$ is laminated by $\mathcal{L}$. We then write $(X, \mathcal{L}, E)$ as a lamination with singularity.

Let $(X, \mathcal{L}, E)$ be a lamination by complex manifolds of dimension q with singularity E. And let $\varphi = (z,t) \in \mathbb{D}^q \times K$ be a local chart defined on $U \subset Y$. Then we say that:

(1) U is a **flow box**.

(2) A connected component of $(t = c)$ in U is a **plaque**.

(3) A **leaf** L is a minimal connected subset of $X \backslash E$ such that if L intersects a plaque then L contains the plaque.

(4) A **transversal** in a flow box is a closed subset, and it intersects every plaque in one point.

We are mainly interested in several special cases of above general definitions:

(1) We say $(X, \mathcal{L}, E)$ is a lamination with singularity by Riemann surface if $q = 1$.

(2) We say $(X, \mathcal{L}, E)$ is a C^k-lamination with singularity if K_i is assumed in a Euclidean space, and transition functions f_{ij}, γ_{ij} are C^k in t.

(3) We say $(X, \mathcal{L}, E)$ is a holomorphic foliation with singularity if X is a complex manifold of dimension n, $K_i = \mathbb{D}^{n-q}$ and all transition functions are holomorphic.

It can be seen that a holomorphic submersion $X \to Y$, a global section of twisted holomorphic 1-form $H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$ or a global section of twisted holomorphic vector field $H^0(X, TX \otimes L)$ naturally induce a holomorphic foliation with singularity on X. Here L is a holomorphic line bundle on X.

A.5.B Invariant measures of a lamination

We then introduce the notion of directed positive current: Suppose X is contained in a compact Kähler manifold (M, ω) of dimension k. Assume that $\Lambda^2(E) = 0$ with respect to the two dimensional Hausdorff measure Λ^2 on X.

Consider a lamination by Riemann surfaces $(X, \mathcal{L}, E)$ with l continuous $(1,0)$ forms γ_j, $j = 1, \cdots, l$ on M, such that $\gamma_j \wedge [V_\alpha] = 0$ locally for every plaque V_α, γ_j vanish on E and $\operatorname{rank}(\gamma_j) = k - 1$.

A typical example is a (singular) foliation on complex surface defined by a twisted holomorphic 1-form (resp. vector field) with isolated singularity.

Definition A.9: A positive current T of bi-dimensional $(1,1)$ on M is weakly directed by $(X, \mathcal{L}, E)$ if $T \wedge \gamma_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$.

Definition A.10: A $(X, \mathcal{L}, E)$-invariant measure consists of the following data:

(1) An atlas for lamination $(Y, \mathcal{L})$

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{D}^q \times K_i$$

(2) A family of Borel measures μ_i on K_i

(3) The family $\{\mu_i, K_i\}$ satisfies the compatibility conditions:

$$\mu_j(E) = \mu_i(\varphi_{ij}(E))$$

Thanks to the $(X, \mathcal{L}, E)$-invariant measure, one can define the foliated cycle (associat-
ed to $\{\mu_i, K_i\}$):

$$T_\mu := \int_K [V_\alpha] \mathrm{d}\mu(\alpha)$$

where K is a local transversal. Take a smooth form θ of bi-degree $(1,1)$ whose support is contained in U_i, we have

$$\langle T_\mu, \theta \rangle = \int_{K_i} \left(\int_{V_\alpha} \theta \right) \mathrm{d}\mu(\alpha)$$

It is easy to see that T_μ is a weakly directed closed positive current.

By a classic theorem of Sullivan, these foliated cycles are all the weakly directed positive currents under suitable conditions. Actually, we have

Theorem A.10: Every positive closed weakly directed current T on a regular lamination $(Y, \mathcal{L})$ by Riemann surfaces which is transversally C^1 has the following form in a flow box

$$T_\mu := \int_K [V_\alpha] \mathrm{d}\mu(\alpha)$$

where μ is a $(Y, \mathcal{L})$ invariant measure. We thus get a $1-1$ correspondence between invariant measure and weakly directed closed positive current.

Remark A.10: The C^1-regularity is necessary, instead we will get a counter-example if $\mathcal{L}$ is just Lipschitz.

A.5.C Holonomy of holomorphic foliation

Let $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ be a non-singular holomorphic foliation on X. Here X is a complex manifold, which is not necessarily compact or Kähler . Let L be a leaf of $\mathcal{F}$. For any continuous path on L

$$\gamma : [0,1] \to L$$

with $p_0 = \gamma(0), p_1 = \gamma(1)$. We define the holonomy of $\mathcal{F}$ along γ with respect to local transversals Σ_0 and Σ_1 around p_0 and p_1:

We recall that a local transversal Σ around a point p is a closed subset containing p (or closed submanifold in some cases) in a local chart (U, φ) of $\mathcal{F}$, such that

$$\varphi : U \to \mathbb{D}_z^q \times \mathbb{D}_t^{n-q}, \quad \varphi(p) = (0,0)$$

and Σ intersects each plaque at only one point, that is

$$\sharp(\varphi(\Sigma) \cap \{t = c\}) = 1$$

For example, $\Sigma = \{p \in U \mid \varphi(p) \in \{0\} \times \mathbb{D}^{n-q}\}$ is a local transversal which is also a locally closed submanifold.

We then begin our definition of the holonomy: Given $\mathcal{F}, L, \gamma, p_0, p_1, \Sigma_0, \Sigma_1$, we take a partition of $[0,1]$ by

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$$

and a sequence of local charts of $\mathcal{F}$: $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, \cdots, k-1\}$ such that

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i, \quad \Sigma_0 \subset U_0, \quad \Sigma_1 \subset U_{k-1}$$

Define $p_{i/k} = \gamma(t_i)$, and take a local transversal $\Sigma_{i/k}$ around $p_{i/k}$ which is contained in U_i. We can always let $\Sigma_{i/k}$ to be a local submanifold.

For any $0 \leqslant i \leqslant k-1$, we can define a map f_i as follow: For any point

$$x = (h_i(c), c) \in \Sigma_{i/k}$$

parametrized by $\varphi_i : U_i \to \mathbb{D}^q \times \mathbb{D}^{n-q}$, we define $f_i(x)$ to be the point on $\Sigma_{i+1/k}$ which lies on the same leaf as x.

This map is well-defined, after taking a small disk $D_{i/k} (\subset \Sigma_{i/k})$ as our domain, and a small disk $D_{i+1/k} (\subset \Sigma_{i+1/k})$ as our codomain: Actually, since $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, we can shrink $\Sigma_{i+1/k}$ such that it is contained in U_i, and parametrized by

$$(h_{i+1}(c), c)$$

under $\varphi_i : U_i \to \mathbb{D}^q \times \mathbb{D}^{n-q}$. Then we define

$$f_i : (h_i(c), c) \mapsto (h_{i+1}(c), c) \quad \text{for } c \in \mathbb{D}^{n-q}$$

This will give a bijective from $D_{i/k}$ to $D_{i+1/k}$.

Thus we have a sequence of maps

$$D_0 \xrightarrow[\sim]{f_0} D_{1/k} \xrightarrow[\sim]{f_1} \cdots D_{k-1/k} \xrightarrow[\sim]{f_{k-1}} D_1$$

Shrinking D_0 and D_1 to be $\widetilde{D_0}$ and $\widetilde{D_1}$, we shall have a bijective

$$f_\gamma := f_{k-1} \circ \cdots f_1 \circ f_0 : \widetilde{D_0} \to \widetilde{D_1}$$

And our theorem says that

Proposition A.4: f_γ is biholomorphic.

Since $\widetilde{D_0}$ and $\widetilde{D_1}$ are small neighborhoods of p_0 and p_1 in Σ_0 and Σ_1 respectively, we regard f_γ as a stalk at p_0 of biholomorphic maps from Σ_0 to Σ_1 which sends p_0 to p_1. We denote the corresponding stalk as

$$[f_\gamma] \in \mathrm{Stalk}_{p_0}(\Sigma_0, p_0; \Sigma_1, p_1)$$

Our next theorem says that $[f_\gamma]$ is well-defined as a stalk:

Proposition A.5: $[f_\gamma]$ does not depend on the choice of:

(1) The partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$.

(2) The local charts $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, \cdots, k-1\}$.

(3) The intermediate local transversals $\{\Sigma_{i/k} \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}$

It only depends on the data: $\mathcal{F}, L, \gamma, p_0, p_1, \Sigma_0, \Sigma_1$.

Moreover, $[f_\gamma]$ is determined up to homotopy:

Proposition A.6: If γ_0 is homotopy to γ_1 related to p_0 and p_1. Then $[f_{\gamma_1}] = [f_{\gamma_2}]$

We mainly focus on the special case when $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma$, $p_0 = p_1 = p$ and Σ_1 is a locally submanifold. In this case, the holonomy homomorphism is

$$f_{\mathcal{F}} : \pi_i(L, p) \to \mathrm{Stalk}_p(\Sigma, p; \Sigma, p) = \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^{n-q}, 0)$$

Here $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^{n-q}, 0)$ denotes the set of stalks of local biholomorphic maps of $\mathbb{C}^{n-1}$ which fix 0. Different choices of Σ will give different holonomy homomorphisms up to conjugation.

A.5.D Rigid currents from foliations

Proposition A.7: Let X be a compact Kähler surface, and $\mathcal{F}$ a non-singular holomorphic foliation by Riemann surfaces on it. Suppose that $\mathcal{F}$ admits a unique holonomy-invariant measure (up to scaling). If T is a strictly positive closed current, then T is rigid.

Proof If T' is another positive current in class $\{T\}$, then

$$T' \wedge T = 0$$

since $\{T\}^2 = 0$. Since T is strictly positive, then T' is weakly directed.

Since $\mathcal{F}$ admits a unique holonomy-invariant measure, then T' is proportional to T. Thus $T' = T$ and T is rigid. ∎

参考文献

[1] Sébastien Boucksom. Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 37(1):45–76, January 2004. doi: 10.1016/j.ansens.2003.04.002. URL https://doi.org/10.1016/j.ansens.2003.04.002.

[2] Tetsuo Ueda. On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle. *Kyoto Journal of Mathematics*, 22(4), January 1982. doi: 10.1215/kjm/1250521670. URL https://doi.org/10.1215/kjm/1250521670.

[3] Amnon Neeman. Ueda theory: theorems and problems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 81(415):0–0, 1989. doi: 10.1090/memo/0415. URL https://doi.org/10.1090/memo/0415.

[4] Takayuki Koike. Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one. https://arxiv.org/abs/2110.04864, 2021. URL https://arxiv.org/abs/2110.04864. [Preprint].

[5] Takayuki Koike. Plurisubharmonic functions on a neighborhood of a torus leaf of a certain class of foliations. *Forum Mathematicum*, 31(6):1457–1466, November 2019. doi: 10.1515/forum-2018-0228. URL https://doi.org/10.1515/forum-2018-0228.

[6] Takayuki Koike and Noboru Ogawa. On the neighborhood of a torus leaf and dynamics of holomorphic foliations. https://arxiv.org/abs/1808.10219, 2018. URL https://arxiv.org/abs/1808.10219. [Preprint].

[7] Simion Filip and Valentino Tosatti. Canonical currents and heights for K3 surfaces. https://arxiv.org/abs/2103.02095, 2021. URL https://arxiv.org/abs/2103.02095. [Preprint].

[8] Nessim Sibony, Andrey Soldatenkov, and Misha Verbitsky. Rigid currents on compact hyperkahler manifolds. https://arxiv.org/abs/2303.11362v1, 2023. URL https://arxiv.org/abs/2303.11362v1. [Preprint].

[9] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Riemann surface laminations with singularities. *Journal of Geometric Analysis*, 18(2):400–442, April 2008. doi: 10.1007/s12220-008-9018-y. URL https://doi.org/10.1007/s12220-008-9018-y.

综合论文训练记录表

学生姓名	曹君宇	学号	2018010317	班级	数93
论文题目	紧复凯勒曲面上的刚性拟有效类				
主要内容以及进度安排	本文对紧复凯勒曲面与紧hyper-kähler流形上的刚性拟有效类进行了研究，以下是进度安排： 本学期1~4周：收集相关文献进行阅读，完成开题报告及论文初稿. 5-8周：论文完成80% 9-13周：完成论文中文稿，随后进行修改. 指导教师签字：肖建 考核组组长签字：肖建 2023 年 03 月 10 日				
中期考核意见	可以考查高维hyperkähler上Zariski分解与刚性拟有效类的关系。 考核组组长签字：肖建 2023 年 04 月 13 日				

指导教师评语	论文取得了三个原创结果，对曲面的刚性拟有效类作出了初步分类，并且对一类椭圆面给出了直径主数的计算，是一篇优秀的本科论文。 指导教师签字：肖建 2023 年 06 月 06 日
评阅教师评语	论文结果完整有深度，论文完成质量很高。对曲面的分类结果有很漂亮的形式和应用。 评阅教师签字：余成龙 2023 年 6 月 6 日
答辩小组评语	该论文包含三个有意思的定理，对曲面中的刚性拟有效类进行了分类，对一些椭圆曲线情形进行了计算。论文包含一系列原创结果，质量很高。 答辩小组组长签字：肖建 2023 年 6 月 6 日

总成绩：A

教学负责人签字：刘思齐

2023年 6 月14日